THÉMATA. REVISTA DE FILOSOFÍA. Núm. 42, 2009.

FLUXIONES, INFINITESIMALES Y FUERZAS VIVAS.
Un panorama leibniziano

José L. Montesinos Sirera. Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia

Resumen: Leibniz inventó (o descubrió (?)) el cálculo diferencial, en el que es básico el concepto de infinitésimo. Paralelamente, Newton también había construido la misma y poderosa herramienta del Cálculo con su concepto de fluxión, con el que trataba de evitar los poco rigurosos infinitésimos. En Leibniz, el cálculo con los infinitos interactuó con su Metafísica y con su Dinámica de las fuerzas vivas.

Abstract: Leibniz invented (discovered (?)) differential calculus in which infinitesimals played a basic role. Newton also and independently constructed the same powerful tool, trying to avoid infinitesimals with the more rigorous concept of fluxion. In Leibniz's thought, the mathematics of infinites will interact with his Metaphysics and with his Dynamics of living forces.

1. Introducción.

1.1. Leibniz: filósofo y físico, matemático y metafísico.

> «Ahora bien, habiendo una infinidad de mundos posibles en las ideas de Dios, y no pudiendo existir más que uno solo, precisa que haya una razón suficiente de la elección de Dios que le determine a esto mejor que a aquello...»
>
> «Este enlace, pues, o acomodo de todas las cosas creadas con una y de una con todas las demás, hace que cada sustancia simple tenga relaciones que expresan todas las demás y sea, por consiguiente, un viviente espejo perpetuo del Universo» . Leibniz. *Monadología*, 53 y 56.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) fue un pensador de oceánica erudición que dedicó sus energías a estudiar y a escribir sobre todas las materias del conocimiento: lógica, matemáticas, filosofía, astronomía, física, historia natural, medicina, geología, alquimia, derecho, política..., escritos que se conservan en el *Leibniz Archiv* de Hannover. Fundador de la Academia de Ciencias de Berlín, mantuvo una vibrante correspondencia con el newtoniano Samuel Clarke sobre física y teología. Siendo aún muy joven leyó a su compatriota el filósofo, matemático y cardenal de la Iglesia católica Nicolás de Cusa y quedó muy impresionado con su matemática transfinita en la que geometría y teología se unen y en la que un círculo de radio infinito se convierte en una recta, coincidencia de los opuestos, con la que se supera la tensión entre lo rectilíneo y lo circular.

De Kepler aprendió las leyes del movimiento de los planetas y apreció en gran medida su voluntad de alcanzar una explicación física del porqué de aquellos movimientos, sin resignarse a tener solamente una explicación matemática que «salvase las apariencias», como era usual hasta entonces en la Astronomía.

Comparte con Descartes la idea de encontrar una teoría de la materia y del movimiento que sea perfectamente racional. En un primer momento, cartesiano convencido, reformula las leyes cartesianas para hacerlas más coherentes y posteriormente, en una segunda etapa, rompe con las ideas de su maestro y crea una nueva concepción mecánica en estrecha relación con una metafísica completamente original.

Conocedor de las técnicas infinitesimales de Bonaventura Cavalieri, es en su estancia en París de 1672 a 1676, cuando se dedica al estudio intensivo de las matemáticas, teniendo como ilustre iniciador a Christiaan Huygens, con quien aprende las excelencias de la geometría y su aplicación al estudio del movimiento. Pronto superará al maestro y será el co-creador, con Newton, del cálculo infinitesimal, poderosísima herramienta al servicio de la física.

Para Leibniz, la Matemática está entre la Física y la Metafísica, ciencia esta última de los *primeros principios* o causas, que proporciona el marco conceptual de fondo en el que se despliega la física de lo real, labrada con la matemática del cálculo infinitesimal. Y estos principios son entre otros, el de continuidad, que expresa que en la Naturaleza nunca se producen saltos, sino que todo tiene lugar según un proceso gradual; el principio de razón suficiente, con el que nada ocurre en la realidad sin razón que lo determine y el principio de los indiscernibles, que postula la imposibilidad de que existan dos seres idénticos en el Universo.

Orgía de infinitos para Leibniz, el Mundo, elegido por Dios en razón de su mayor grado de perfección, y por tanto el mejor de los posibles, es como un inmenso estanque con peces, que albergan en sus entrañas nuevos estanques repletos de peces y así sucesivamente. El Mundo como un juego infinito de muñecas rusas.

El elemento constitutivo de la realidad para Leibniz será la mónada, punto metafísico, átomo inmaterial, recinto sin puertas ni ventanas, aislado del exterior pero en el que se halla, desde su perspectiva, una representación de la totalidad del Mundo. En el Universo todo está en movimiento y la materia es infinitamente divisible y por tanto las unidades constitutivas del Todo son puntos de actividad, sin extensión, que a diferencia de los puntos matemáticos, son portadores de acción continua. Es la armonía pre-establecida por Dios, el Dios cristiano de atributos infinitos, que una vez más es el protagonista de los desarrollos científicos del siglo XVII. Leibniz, filósofo optimista y excelso matemático, es el físico creador de la Dinámica.

1.2. La Dinámica y la polémica de las fuerzas vivas.

> «... Yo me había internado mucho en el país de los escolásticos cuando las matemáticas y los autores modernos me hicieron salir, aun muy joven de él. Me encantó su hermosa manera de explicar mecánicamente la naturaleza y desprecié con razón el método de los que sólo emplean formas o facultades con las que nada se aprende. Pero al tratar después de profundizar en los principios mismos de la mecánica para dar razón de las leyes de la naturaleza, que conocíamos por experiencia, advertí que no bastaba con la consideración exclusiva de una *masa* extensa y que era preciso emplear además la noción de *fuerza*, que es muy inteligi-

ble, aunque pertenezca al dominio de la metafísica ...» (De un artículo de Leibniz publicado en 1695 en el *Journal des Savants).*

Frente al sistema cartesiano, identificar el concepto de masa y el de extensión no basta para dar cuenta de las acciones mecánicas. Es indispensable la noción de fuerza, pero no sólo como algo necesario para el análisis matemático del movimiento, sino como una noción primaria estrechamente ligada a la Naturaleza y a los fenómenos que en ella se producen. Para Leibniz, creador del término «Dinámica» para designar la parte de la Física que estudia sus manifestaciones, fuerza era lo que hoy llamamos energía cinética.

Los conceptos de fuerza, masa y espacio son fundamentales y no siempre estuvieron de acuerdo sobre ellos los iniciadores de la Ciencia Moderna. Y se dieron diferentes respuestas a la pregunta de cómo medir las fuerzas de cuerpos en movimiento a través de sus efectos observables. Para los cartesianos, fuerza es lo que en la física actual es la cantidad de movimiento, esto es, el producto de la masa por la velocidad, (para ser más precisos, para los cartesianos esta velocidad no estaba considerada como una magnitud vectorial). Para Newton, fuerza es la variación en el tiempo de la cantidad de movimiento (*momentum*), o lo que es lo mismo, el producto de la masa por la aceleración y esto constituye su segunda ley del movimiento. Leibniz llamará «fuerza viva» al producto de la masa por la velocidad al cuadrado.

¿Por qué esta disparidad de opiniones sobre lo que deba ser la fuerza, que sirva para construir una explicación racional matematizada del movimiento? La Historia, que es sabia, nos hace ver las dificultades de los conceptos, mostrando su génesis y posteriores desarrollos y al tiempo advierte de los peligros que rodean la enseñanza de los mismos, al presentarlos como constructos hechos y salidos limpiamente de la genial cabeza de su creador. Inicialmente asociada al esfuerzo muscular que hacemos cuando presionamos o tiramos de algo, el concepto de fuerza vigente, que hemos estudiado en el bachillerato es el matemático y newtoniano y su representante más emblemático es el de la universal fuerza de la gravitación, útil instrumento metodológico para la medición de los movimientos espaciales, pero, y muy a pesar de su creador, un ente metafísico, como así hará constar Leibniz.

El concepto de fuerza protagonizó una larga y virulenta polémica entre cartesianos y leibnizianos. Leibniz sostenía que la cantidad de movimiento cartesiana no era adecuada para medir la fuerza y que además el principio de conservación de la cantidad de movimiento en el *Mundo*, tal y como lo enunciara Descartes, era falso. En cambio, lo que sí se conserva es la fuerza viva, y por tanto ésta sería el candidato ideal para medir aquel dinamismo. En realidad, todos tenían parte de razón, si lo consideramos con benevolencia.

Primeramente, hay que explicar que esa necesidad de encontrar principios de conservación del movimiento, estaba en relación con la inmutabilidad del Dios creador y que el principio cartesiano es cierto si se considera la velocidad como una magnitud vectorial. Por otra parte, si consideramos como buena, como la mejor, la consideración newtoniana de fuerza, $F=m.a$, y a ello estamos obligados también por la Historia, entonces la cantidad de movimiento de Descartes, $m.v=m.a.t=F.t$, puede ser la fórmula correcta que mida la relación de dos fuerzas constantes, siempre que se apliquen en un mismo tiempo. Pero si lo que consideramos es la relación que existe entre dos fuerzas constantes aplicadas en un mismo espacio sin considerar el tiempo, entonces la fuerza viva de Leibniz, $mv^2=m.2a.s=2F.s$ mide bien la relación entre aquellas. Su principio de conservación, además de cierto en el caso de cuerpos elásticos, es el hoy vigente principio de conservación de la energía.

1.3. La concepción del Mundo leibniziana.

Leibniz, pasó por este Mundo con la firme voluntad de entenderlo para poder así explicarlo a sus prójimos, especialmente a las Princesas alemanas, que fueron muy receptivas a las enseñanzas del sabio bibliotecario de la corte de Hannover. Aunque fue autor de una inmensa obra escrita, no publicó en vida más que un libro propiamente dicho, escrito en la lengua de moda entonces, el francés, y de título *Teodicea*, o lo que es lo mismo, una Teología basada en principios de razón, que trataba sobre la bondad de Dios, la libertad del hombre y el origen del mal.

Leibniz, al igual que Newton, tiene, en principio, la voluntad de no mezclar el razonamiento científico deductivo con consideraciones de tipo religioso. Para ello, su arsenal de recursos probatorios se ha fortalecido con el cálculo diferencial, que Newton independientemente también ha inventado, dándole el nombre de cálculo de fluxiones. Y éste, el de la prioridad de su invención, fue uno más de los motivos de discordia entre estos dos grandes pensadores. La presentación algebraica de Leibniz del cálculo infinitesimal será la que se imponga posteriormente y dote a los científicos del siglo XVIII de un potentísimo instrumento para la física matemática, que se convertirá en la ciencia por excelencia.

El mundo que concibe Leibniz se puede comprender porque está pleno de razones, porque en el seno mismo de toda realidad se hallan los principios que hacen inteligibles a los seres, que explican su existencia de un único modo posible, aquel que viene determinado por sus esencias. Pero hablar de esencias o de sustancias, en un momento en que la ciencia naciente se esforzaba por expulsar de su territorio cualquier noción vinculada al viejo aristotelismo, constituía una provocación a la que muchos respondieron con mayor o menor vehemencia. Y es que Leibniz, lejos de denostar a Aristóteles, considera que no debe ser barrido de un plumazo y en su totalidad, y que hay que rescatar las ideas e intuiciones brillantes del estagirita. En este sentido, introduce de nuevo las causas finales en el universo, y no sólo desde la perspectiva metafísica o explicación última del mismo, sino como una herramienta de gran valor en la investigación de los fenómenos de la Naturaleza.

Para Leibniz todo conspira. Todo está ordenado en el universo, todos los seres, interrelacionados entre sí, trabajan en un único y mismo fin, siempre sujeto a razones que podemos ir descubriendo, y así poder ir construyendo de ese modo el lenguaje o *mathesis universalis* que nos permita descifrar el Cosmos en su totalidad.

Acepta, impresionado, la explicación matemática del Universo newtoniano de los *Principia*, pero denuncia la inexistencia de una explicación física. No acepta el espacio absoluto, adelantándose en esto a Berkeley, Mach y Einstein. Para él, el espacio no es más que una relación que concebimos entre los seres coexistentes, el orden de sus cuerpos, sus configuraciones, las distancias entre ellos, etc. Tampoco acepta las fuerzas a distancia newtonianas y considera que la mejor explicación, aún no siendo completamente satisfactoria, es la de los vórtices, que comenzara Descartes y perfeccionara Huygens. Consigue demostrar todos los teoremas newtonianos por medio del cálculo diferencial, pues es un excelente matemático, pero siguiendo una línea que viene de Aristóteles y de Kepler y que continuará posteriormente en Hegel e incluso en Einstein, antepone la física a la matemática y pone límites a los desarrollos únicamente cuantitativos.

En Leibniz, el movimiento y la extensión no son, como para Descartes, la esencia de la realidad. El espacio y el tiempo no son realidades ni sustancias, sino solamente relaciones. El movimiento, que es el cambio continuo en el espacio y el tiempo, es sólo y también una relación. Lo que es real en el movimiento es la fuerza, un estado momentáneo que lleva consigo una tendencia hacia un estado futuro. La conservación de las sustancias y de esa fuerza es la base del sistema filosófico leibniziano. Lo que es real en el Universo es la acción y la esencia de la sustancia es la actividad, la más íntima naturaleza de un cuerpo, una fuerza primitiva o tendencia hacia el cambio. A esas básicas e indivisibles sustancias cuya esencia es una continua tendencia a la acción, las presentó Leibniz en 1714, y las llamó mónadas.

El Mundo de Leibniz, un mundo vivo, que vibra todo él pleno de energía, es la antesala del Universo romántico que algunas decenas de años más tarde crearán los pensadores alemanes. Y al igual que en el Universo todo colabora, este modelo es trasladado por el propio Leibniz a la sociedad de los humanos con su proyecto de creación de una República de las Letras, formada por Instituciones científicas y Academias Nacionales que aúnen esfuerzos, ideas e investigaciones para conseguir un grado de conocimiento que permita, previa la reunificación de todas las Iglesias, alcanzar la paz y la felicidad de un auténtico Reino de Dios, por el que se juramentarán a finales del siglo XVIII, a los sones de la Revolución, tres jóvenes seminaristas de Tübingen, el poeta Hölderlin, el filósofo de la Naturaleza Schelling, y el gran filósofo de la modernidad Georg Wilhelm Hegel.

2. Infinito y Cálculo Infinitesimal en Leibniz.

Cuando el joven diplomático Gotfried Wilhem Leibniz llega a París en 1672, tiene 26 años y no sabe matemáticas o sabe muy pocas. Pero lee admirado los escritos matemáticos de Pascal, que había muerto diez años antes a la edad de 39 años, y entra en relación con Christiaan Huygens que es en esos momentos uno de los más prestigiosos matemáticos europeos. La poderosa mente de Leibniz aprende con celeridad las técnicas euclidianas y arquimedianas y las innovaciones algebraicas cartesianas. Estudia a Fermat y a Gregoire de Saint Vincent, a Roberval y especialmente a Pascal. Pronto se familiariza también con el uso de las series infinitas, particularmente empleadas por los matemáticos ingleses, Wallis, Newton, Mercator y James Gregory.

En París, Leibniz, descubre la importancia que en esos momentos tiene la matemática en la filosofía natural y capta que la gran diferencia de la nueva matemática en relación a la antigua estriba en el uso indiscriminado de las técnicas infinitesimales y en un decidido impulso al estudio y dominio del infinito matemático. Leibniz no se resigna a no conocer y usa el tema del infinito en la comprensión de la realidad. Como sí le pasara a Galileo, que, conservando el rigor euclídeo y aristotélico en el uso del infinito, había confrontado estupefacto las contradictorias maravillas que el infinito presentaba en las matemáticas: las paradojas geométricas de la rueda y de la escudilla, o la paradoja del todo y la parte que encuentra en la aritmética cuando compara la serie de los números naturales con la de los cuadrados de esos números.

Leibniz no va tampoco a compartir con su admirado Pascal la angustia de los infinitos, la angustia ante la imposibilidad de comprender un Universo que el pensador francés creía ya infinito y delante del que su imaginación sucumbía ante la doble infinitud, frente a los inmensos espacios sin límite o perdido en los entresijos infinitesimales de una gota de agua o de un grano de arena. Leibniz no se resigna a la contemplación silenciosa y a la experiencia mística pascaliana de un Mundo infinitamente divinizado. En sus *Essais de Théodicée,* dirá:

> «*et après tout, il est très faux qu'un infini actuel soit imposible.*»

Para Leibniz si el infinito está en nuestra mente, y si somos capaces de considerar la división infinita o darle sentido a una suma infinita es porque el infinito nos pre-existe en la realidad. El infinito actual, en contra de lo que firmemente mantenía Aristóteles, existe en el Mundo:

> «Estoy talmente a favor del infinito actual, que en lugar de admitir que la Naturaleza lo aborrece, como se dice comúnmente, mantengo que está presente en todo, para mejor resaltar las perfecciones de su autor. Creo, por tanto que no hay ninguna parte de la Naturaleza que no sea solo divisible, sino que está ya actualmente dividida, y por consiguiente, la menor parcela debe ser considerada como un mundo pleno de una infinidad de criaturas diferentes» (de una carta a Foucher).

Pero esta tesis tendrá que ser coherente y además deberá servir para algo que no sea una mera especulación sin sentido. Leibniz sabe de la prudencia de Descartes —que, ciertamente, no es un místico como Pascal— en relación con el tema del infinito, como cuando nos previene en sus *Principia Philosophiae* (1644) de que no hay que tratar de comprender el infinito y que cuando a algo no le encontramos límites, como sucede con el espacio, el tiempo o el número de estrellas, conviene decir que ese algo es indefinido. Y reservar solo a Dios el término de infinito. Aún así y a pesar de las dificultades que pueden rodearlo, Leibniz ha encontrado el gran tema de su vida, el de los infinitos, sobre el que girará toda su filosofía, pues:

> «...aunque nosotros seamos seres finitos, bien que podemos saber cosas relativas al infinito. Por ejemplo sobre las líneas asintóticas, es decir, aquellas que prolongadas al infinito se acercan una a la otra más y más, sin llegar nunca a encontrarse. O sobre los espacios de longitud infinita que tienen sin embargo una superficie finita o sobre la suma de series

infinitas. Si no fuera así no podríamos saber nada cierto de Dios...» (de *Reflexions sur la partie générale des principes de Descartes).*

Y Leibniz pretende saber de Dios y de su obra: de la realidad, que está impregnada según él de infinitud. Y la matemática, como ya captara Nicolás de Cusa, permite relacionar lo finito con lo infinito, como sucede con esos recintos, limitados por determinadas hipérbolas y sus asíntotas, que teniendo una longitud infinita poseen, asombrosamente, una superficie finita, como así quedaba de manifiesto cuando se usaba esa nueva matemática de los infinitesimales.

Cuando con gran habilidad en el manejo de las series infinitas Leibniz consigue en París, en 1674, la cuadratura aritmética del círculo, esto es, la prueba de que la superficie de un círculo de diámetro 1 es:

$$\pi/4=1-1/3+1/5-1/7+1/9- \cdots\cdots$$

queda convencido de la pertinencia del uso de los infinitos e infinitésimos en la ardua labor de desentrañar los ocultos diseños del Creador. Leibniz queda maravillado ante la elegancia de este resultado, que vuelve a poner de relieve la presencia de la serie de los números impares en aquellos divinos diseños.

Porque ya Galileo había mostrado la relación de los números impares con el ritmo de caída de un grave en la superficie de la Tierra y ahora surgía de nuevo esa serie numérica, con la que se cuantificaba... en un proceso infinito la deseada proporción entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, esto es, el número π.

Su maestro de matemáticas, Christiaan Huygens contempló con satisfacción los progresos del pupilo, como así queda reflejado en esta carta a Leibniz del 7 de noviembre de 1674:

> «Le devuelvo, Señor, su escrito en relación a la Cuadratura Aritmética (del Círculo), que encuentro muy bella y feliz. Y no es poco, en mi opinión, haber descubierto, en un Problema que ha hecho trabajar a tantas mentes, una nueva vía que parece dar alguna esperanza de alcanzar finalmente una solución. Pues según su descubrimiento, al ser el círculo a su cuadrado circunscrito como la sucesión infinita de fracciones 1-1/3+1/5 -1/7+1/9-...., a la unidad, no parece imposible dar la suma de esa progresión, y consiguientemente la cuadratura del círculo, después de que usted haya mostrado cómo determinar las sumas de otras progresiones que parecen ser de la misma naturaleza.
>
> Pero aunque eso no fuera posible, lo que usted ha ya conseguido será celebrado para siempre por los geómetras...»

Se está refiriendo Huygens a la auténtica y continuadamente buscada cuadratura del círculo, que él siempre pensó posible de lograr: a la geométrica, es decir, a construir únicamente con regla y compás un cuadrado de superficie igual a la de un círculo dado. Leibniz recordará muchas veces en su vida éste su primer logro importante en matemáticas, que con el título *De Vera Proportione Circuli ad Quadratum Circumscriptum in Numeris Rationalibus Expressa,* publicará en 1682, en el primer número de las *Acta*

Eruditorum. En una carta a Wolff de 1703, Leibniz vuelve a recordar cómo había obtenido su cuadratura aritmética del círculo. Poco importa que Newton señalara la mala convergencia de esta serie y por tanto su inefectividad para el cálculo aproximado de la constante π, o que incluso insinuara que Leibniz había copiado este resultado de matemáticos ingleses. Así, en plena efervescencia de reacciones a la publicación del panfleto anti-leibniziano *Commercium Epistolicum* de 1712, Johann Bernoulli (1667-1748), en carta de 7 de Junio de ese mismo año, amigablemente (?) señala a Leibniz hechos que no le van a agradar:

> «Pero si yo he de decir lo que pienso de cuanto puede desprenderse de este fárrago de cartas, parece que fue Mercator el primero que descubrió las series por divisiones continuas y James Gregory quien, ampliando después la materia, llegó al parecer el primero a la cuadratura aritmética del círculo en la serie 1-1/3+1/5-1/7+1/9-...., que tú, desconociendo sin duda que ya antes había sido descubierta, la editaste como tuya en las Actas, y realmente tuya fue, lo mismo que de Gregory, pues, aunque más tarde, tú la descubriste igual que él: descubrir es propio del talento, hacerlo el primero es cosa de la suerte, como en algún lugar dice Wallis.»

Cuando en la década de los noventa, Leibniz explicitó en su correspondencia con Jean Bernoulli y con L'Hôpital, que tenía en mente escribir una *Science de l'Infini,* su cálculo diferencial era ya conocido en los medios intelectuales parisinos. En 1696, el Marqués de L'Hôpital publicaba, con la ayuda del joven Jean Bernoulli, una obra recopiladora de los avances que se habían hecho hasta entonces en el cálculo con los infinitos: *Analyse des infiniments petits.(Pour l'intelligence des lignes courbes).* En su Prólogo, el Marqués hacía la apología de ese método maravilloso con el que comparando las *diferencias infinitamente pequeñas* de magnitudes finitas y descubriendo las relaciones entre ellas se conseguía conocer las de las propias magnitudes. Y este Análisis, esencialmente diferente del de los Antiguos, va a permitir ir más allá del infinito simple que se obtiene con las primeras diferencias para continuar con las segundas diferencias y así indefinidamente, de forma que el objeto de ese nuevo cálculo es el de una infinidad de infinitos, puestos, claro está, al servicio de la comprensión de lo matemático, disciplina que se había vuelto imprescindible entonces para el estudio de la filosofía natural.

Y puesto que una curva —como consideraba el maestro Leibniz— no es más que una línea poligonal de infinitos lados infinitesimales, no distinguiéndose entre ellas —las curvas— más que por las *diferencias* de los ángulos que esos lados infinitamente pequeños forman entre ellos, de ahí que ese Análisis sirviese para determinar la curvatura y las tangentes y los puntos de inflexión de las curvas y en definitiva para tener una buena inteligencia de las mismas.

En la secular tensión entre lo recto y lo curvo, Leibniz privilegió lo rectilíneo, como también lo hicieran Descartes y Newton, aunque con diversa intención. De esta manera y con el concurso de sus procesos infinitos y de sus infinitesimales, Leibniz reduce el movimiento circular uniforme, movimiento acelerado según la dinámica newtoniana, a una sucesión infinita de movimientos rectilíneos uniformes e infinitesimales seguidos de los correspondientes impulsos, también infinitesimales. Análogamente, el también uniformemente acelerado movimiento rectilíneo de la caída de un cuerpo en la superficie terrestre será susceptible de ser considerado por Leibniz como una sucesión infinita de movimientos rectilíneos uniformes seguidos de impulsos infinitesimales, y siempre con el concurso del infinito, Leibniz propondrá la ley de la continuidad, fundamental pieza en el entramado de su compleja *Weltanschauung.* Así, en una carta a Varignon de febrero de 1702, dirá :

> «mi ley de la continuidad, en virtud de la cual es lícito considerar el reposo como un movimiento infinitamente pequeño (esto es, como equivalente a una suerte de su contradictorio), y la contigüidad como una distancia infinitamente pequeña, y la igualdad como la última de las desigualdades».

Entrando en la consideración ontológica que Leibniz tenía de los útiles matemáticos, el historiador de la matemática Marc Parmentier, en su excelente presentación de 23 artículos matemáticos escritos por Leibniz y publicados en los *Acta Eruditorum y* que lleva por título *Naissance du Calcul Differentiel,* se pregunta si para Leibniz la continuidad era una ficción matemática o una continuidad actual en la Naturaleza, y él mismo se responde, diciendo que para Leibniz el infinito y el infinitamente pequeño están en la Naturaleza pero al no poderlos apercibir físicamente (por el momento...), nos conformamos con suponerlos mediante ficciones y analogías, recogidas de las matemáticas, que constituyen un obligado rodeo para poder alcanzar finalmente lo real.

En carta al matemático Varignon del 2 de febrero de 1702, Leibniz se referiría al tema de la siguiente manera:

> «No obstante, puede decirse en general que toda la continuidad es una cosa ideal y que nada hay jamás en la naturaleza que tenga partes perfectamente uniformes aunque, como contrapartida, lo real no deja de ser gobernado perfectamente por lo ideal y abstracto, de manera que las reglas de lo finito alcanzan lo infinito como si hubiera átomos (es decir, elementos asignables de la naturaleza) aunque no los hay en absoluto, pues la naturaleza está actualmente subdividida sin fin; y, a la inversa, las reglas de lo infinito alcanzan lo finito como si hubiera infinitamente pequeños metafísicos aunque de ellos no tenemos necesidad alguna, pues la división de la materia jamás llega hasta partículas infinitamente pequeñas. De esta manera, todo se gobierna de acuerdo con la razón, y, si no fuera así, no habría ni ciencia ni regla, lo que en modo alguno sería conforme con la naturaleza del soberano príncipe.»

Para Bernardino Orio, que ha tenido la paciencia de leer una primera versión del texto de esta conferencia, la continuidad matemática tendría en Leibniz una dimensión cósmica y las ficciones del cálculo o las analogías no son «un rodeo», son la esencia del mundo; no son meramente metáforas sino «símbolos»: el símbolo era, para los antiguos, «la otra parte» que hay que buscar para completar «esta nuestra parte» que se nos da a conocer en los fenómenos: todo es uno. Orio precisa que Leibniz distingue entre lo *imaginativo*, esto es, el cálculo, ligado a la idea de infinito *ideal,* el de las matemáticas, y lo *inteligible*, o sea, las substancias y las partes de la materia que *resultan* de la actividad de las substancias simples, que estaría en relación con el infinito *actual,* el de la realidad.

El cálculo (lo imaginativo) estaría regido por la continuidad y para el matemático no es necesario enredarse en cuestiones metafísicas sino que le basta la continuidad del cálculo, si lo que quiere es ser práctico en sus medidas y nada más. Pero, si lo que se pretende es conocer el mundo y no destruir su unidad y desbaratar el orden del conocimiento y el de la moral, hay que elevarse a lo inteligible. Así pues, Leibniz en una importante carta a Burcher de Volder de 20 de junio de 1703, recalcará:

> «...Es que, en general, los hombres, contentos con satisfacer a su imaginación, no se preocupan de las razones, y por eso han surgido tantas cosas monstruosas contra la verdadera filosofía. Quiero decir, que no han empleado más que nociones incompletas y abstractas, o sea, matemáticas, que el pensamiento sustenta, pero que, desnudas en sí mismas, la naturaleza no reconoce, como la de tiempo, la de espacio o extensión puramente matemática, la de masa meramente pasiva, la de movimiento matemáticamente entendido, etc., con las que pueden los hombres fingir lo diverso sin alcanzar la diversidad real...»

3. El Cálculo de Fluxiones de Isaac Newton

Isaac Newton, en su faceta de matemático, creció con el álgebra de Descartes y fue un excelente manipulador de ese «mágico» nuevo lenguaje, de fórmulas y algoritmos, de ecuaciones y polinomios, siendo uno de los «osados» iniciadores del cálculo con series infinitas y de los desarrollos de funciones en series infinitas, esto es, de su presentación —nada rigurosa en esos momentos— como polinomios con un número indefinido de términos, algebrizando de esta manera el cálculo al conseguir presentar funciones de muy diverso tipo en formulación algebraica.

Aunque Newton llegara a concebir las ideas fundamentales de su Cálculo Infinitesimal siendo aún muy joven —eso habría sido, según él mismo contara posteriormente, en el *annus mirabilis* de 1666—, los historiadores de la ciencia señalan tres importantes momentos en su desarrollo y plasmación, y acompañan la afirmación citando tres manuscritos que mostrarían la evolución de su pensamiento en relación con el nuevo cálculo.

En 1669, Newton escribió *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas,* que no se publicaría hasta 1711. Y en él sintetiza magistralmente los procedimientos que conducían a la resolución de los dos problemas fundamentales relacionados con el estudio de una curva, la obtención de la recta tangente a una curva en un punto y la obtención del área limitada por la curva, las ordenadas relativas a dos puntos situados en el eje de abcisas y el propio eje de las X, la también llamada cuadratura de una curva. El primero de los procedimientos o algoritmos es lo que hoy se designa con el nombre de derivada o variación instantánea de la curva en el punto, que da la pendiente o inclinación de la recta tangente en cuestión. El segundo es la integral de la curva que da el área, y lo que Newton pone de manifiesto es que estos dos algoritmos están estrechamente relacionados, de manera que para obtener la integral o área de una cierta curva o función, basta con hallar una función cuya derivada sea la función inicial. Esto unido a la generalización que obtiene para exponentes fraccionarios y negativos de su famoso binomio, le permitirá fácilmente obtener con generalidad las cuadraturas de todas las funciones algebraicas que se conocían. Pero Newton no quedó completamente satisfecho con esta presentación del cálculo porque era consciente de la debilidad teórica de los infinitesimales que surgían inevitablemente en esos procesos infinitos. Y va a intentar reformularlo con su teoría de fluxiones.

Desde un primer momento, Newton, por influencia cartesiana, había puesto en relación la geometría analítica con la mecánica. Y de su mentor Barrow, había aprendido a considerar las curvas desde un punto de vista cinemático: su análisis de curvas era un análisis de puntos en movimiento. Cuando un punto genérico A se movía a lo largo de una curva, su abscisa x, o su ordenada y, o cualquier otra cantidad variable relativa a la curva aumentaba o disminuía, cambiaba: *fluía.* A estas cantidades que fluían las llamó «fluentes» y a sus velocidades de cambio, a sus variaciones instantáneas con respecto al tiempo, las llamó «fluxiones». Ahora el cálculo estaría fundamentado con un concepto más natural como es el de movimiento y el objeto del mismo sería el de dada una relación entre cantidades fluentes encontrar la relación entre sus fluxiones y recíprocamente. Todo esto lo escribió en un libro, *De Methodis serierum et fluxionum*, escrito en 1671, pero publicado solo en 1736 como una traducción al inglés del latín original.

En 1676, Newton escribe su tercer manuscrito sobre el cálculo: *De quadratura curvarum*, que no añade nada de sustancial a lo escrito en su tratado de fluxiones pero que revela una voluntad de rigor en el tratamiento de los infinitos. Hasta ese momento —según un celebrado artículo de Philip Kitcher (ver referencia en la Bibliografía)— Newton se habría movido en un contexto heurístico y de descubrimiento. Las fluxiones habrían evitado los peligros de los infinitésimos, pero no se salvaban con ellas completamente las acechanzas de los procesos infinitesimales, pues la velocidad instantánea conllevaba un «paso al límite» que no estaba justificado. Pero Newton, invadido de un furor de converso, quería que su matemática siguiera los cánones clásicos de la geometría griega. En la obra cumbre del inglés, en los *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica,* quedaba claramente manifiesta esa voluntad geometrizante de respetar el rigor euclídeo, la manera de hacer de los antiguos matemáticos griegos, la manera de Arquímedes, y así, el Libro I de los *Principia* comienza con unas reflexiones sobre «el método de las primeras y últimas razones», cuya esencia queda reflejada en el Lema I de ese libro:

> «*Quantities and the ratios of quantities, which in any finite time converge continually to equality, and, before the end of that time approach nearer to one another by any difference become ultimately equal.*»

Y el objeto de ese Lema es, como explicará unas páginas más adelante, el de manteniendo el rigor euclídeo, evitar las tediosas y largas deducciones por «reducción al absurdo» que el riguroso método de exhaución de los matemáticos griegos exigía. De esta manera, las demostraciones, que se agilizaban usando «cantidades» infinitesimales, vuelven a tener el rigor de lo geométrico con este método de sumas y razones últimas de cantidades evanescentes, que es claramente un precursor del concepto de «límite», mediante el cual Cauchy y Weierstrass, ya en el siglo XIX, darán completo rigor al cálculo infinitesimal.

En 1740, el que posteriormente sería insigne naturalista, Buffon, hace una traducción al francés del *De Methodis serierum et fluxionum,* con el título *La Methode des Fluxions et des Suites Infinies.* George L. Leclerc (1707-1788), que este era el nombre del conde de Buffon, insertó en esa publicación un Prólogo de presentación de la obra de Newton. En él Buffon hace la pequeña historia de ese cálculo infinitesimal, que es, según él, al mismo tiempo historia de la geometría e historia del infinito. Aunque altamente inspirado en el *Commercium Epistolicum* y en aquella feroz diatriba anti leibniziana del propio Newton que llevó por título:

> «Una Reseña del libro titulado "Commercium Epistolicum Collini et alliorum, de Anaysi Promota" publicado por orden de la Royal Society sobre la disputa entre el señor Leibniz y el doctor Keill acerca de los derechos de invención del método de fluxiones, llamado por algunos el método diferencial»,

el prólogo de Buffon es interesante porque nos muestra la opinión, en esos momentos, de un filósofo de la naturaleza, de un naturalista, que veía con desconfianza el nuevo y desmesurado tratamiento que algunos —refiriéndose claramente a Leibniz, Bernoulli y l'Hôpital— daban al infinito matemático, lejos del moderado y aristotélico uso del mismo, empleado por parte de Euclides y Arquímedes y del propio Newton:

> «...en los últimos tiempos algunos Geómetras nos han dado una visión del infinito diferente de la de los Antiguos, tan alejada de la naturaleza de las cosas ... de ahí han surgido las disputas entre los Geómetras sobre la manera de concebir este Cálculo y sobre los principios de los que deriva; asombrados primero y confundidos después por los prodigios que este cálculo operaba, han creído que el infinito producía todas esas maravillas y que esos conocimientos les habían sido negados a los siglos anteriores y reservados al nuestro; finalmente se ha construido sobre esto sistemas que no han servido más que para embrollar los hechos y oscurecer las ideas.»

El infinito, según Buffon, no existe en la realidad. Es un concepto que se obtiene por privación de la idea de finito, y del que nos podemos servir como de un supuesto que en ciertos casos nos ayuda a simplificar las ideas y a generalizar resultados en la práctica de las Ciencias. Y el mérito del «artista» que lo manipula está en el empleo del mismo para obtener esos resultados y al mismo tiempo en no extralimitarse en un abusivo uso de analogías más o menos literarias, como se hacía en esos fantasiosos sistemas, en clara referencia a las entonces volterianamente denostadas mónadas de Leibniz. Esta sería la opinión altamente mayoritaria de los científicos de los tiempos a venir, con D'Alembert, Laplace y Gauss.

Pero será otro francés, el leibniziano filósofo del siglo XX, Gilles Deleuze, quien en su brillante, profundo y delirante *Le Pli,* explique y justifique ese «salto» a la conciencia de lo infinitesimal:

> «Una cualidad percibida por la conciencia semeja las vibraciones contraídas por el organismo. Los mecanismos diferenciales interiores a las mónadas semejan los mecanismos de comunicación y de propagación del movimiento extrínseco, aunque no sean los mismos y no deban ser confundidos.»

Porque la relación de las vibraciones con el receptor introduce en la materia límites que hacen posible la aplicación del cálculo diferencial. Y es que los dos creadores del cálculo infinitesimal, ambos alquimistas de lo infinito, han querido trascender el estrecho mundo cartesiano, pero es notorio que no lo han hecho de la misma manera. Y según Deleuze:

> «...al determinar las magnitudes según las velocidades de los movimientos o crecimientos que los engendran ("fluxiones"), Newton inventa un cálculo adecuado al movimiento de una materia fluente, e incluso a sus efectos sobre un órgano. Pero, al considerar que esas fluxiones desaparecen en la magnitud creciente que componen, Newton deja intacto el problema de saber donde subsisten las diferentes componentes. Por el contrario, el cálculo de Leibniz, basado en la determinación recíproca de las "diferenciales", es estrictamente inseparable de un Alma en la medida en que sólo el alma conserva y distingue las pequeñas componentes. El cálculo de Leibniz es adecuado al mecanismo psíquico, de la misma manera que el de Newton lo es al mecanismo físico.»

Así pues, Newton, obsesivamente respetuoso con el incontaminado «saber de los antiguos» reviste su Cálculo y su Filosofía Natural de un ropaje geométrico y pretendidamente riguroso, a pesar de los orígenes algebraicos e intuitivos de su faústica creatividad juvenil, y consecuentemente trata de evitar los infinitésimos. A ello no es ajeno, posiblemente, la voluntad de distinguir su obra de la de su rival, aquel teutón llamado Gottfried Wilhelm Leibniz.

4. Leibniz y los infinitésimos

> «*Nul moyen de s'arrêter sur cette pente jusqu'à l'infinitésimal, qui devient, chose bien inattendue assurément, la clé de l'univers entier (...) Pendant que le progrès de la physique conduit les physiciens a quantifier la nature pour la comprendre, il est remarquable que le progrès des mathématiques conduit les mathématiciens, pour comprendre la quantité, à la résoudre en éléments qui n'ont absolument rien de quantitatif.*»
> Gabriel Tarde, en *Monadologie et Sociologie,* (1895).

Esta reflexión, que sobre el uso de lo infinitesimal hacía el leibniziano sociólogo francés a finales del siglo XIX, pone de manifiesto la radical importancia que el concepto de infinitésimo va a tener en la filosofía natural de Leibniz, al tiempo que señala la naturaleza paradójica de la invención que, por otra parte, como ya previniera el gran Aristóteles, conlleva siempre el mal-trato de los infinitos. Más aún, sorprendentemente, cuando Leibniz en numerosas ocasiones y hasta el final de su vida va a calificar a los infinitésimos como *ficciones útiles*.

De la riquísima correspondencia que mantiene Leibniz con Jean Bernoulli a partir de 1693 (que Bernardino Orio de Miguel, leibniziano de pro, ha puesto desprendidamente en Internet, acompañada de su experto comentario), podemos extraer numerosas referencias a ese extraño ente que no siendo un número concreto participa evanescentemente de lo numérico. Recordemos que un infinitésimo era el sustituto de un indivisible. Los indivisibles, o lo que es lo mismo, los segmentos rectilíneos que «ocupaban» un recinto plano, mediante los cuales el matemático italiano Cavalieri conseguía, aun sin demasiado rigor, importantes resultados geométricos, se habían convertido en rectángulos infinitesimales, uno de cuyos lados, obviamente no siendo de magnitud cero, era sin embargo menor que cualquier número, por pequeño que este fuese. Ahora, de manera también no rigurosa según los cánones euclídeos, se podían «sumar» esos infinitos rectángulos infinitesimales. Aunque de motivación geométrica, posteriormente la idea de infinitésimo como magnitud infinitamente pequeña se generalizó también para la aritmética.

Independientemente de la relación que pueda existir en Leibniz entre lo infinitesimal y su Dinámica, a la que nos referiremos en el siguiente apartado, veamos ahora aunque sea sucintamente a través de esos textos de Leibniz, tres cuestiones:

a) la existencia o no del infinitésimo en la matemática o en la realidad física.

b) la relación con su monadología, si es que la hubo.

c) la opinión de Leibniz sobre una polémica que se montó entre los matemáticos Varignon y Rolle acerca de un cierto texto suyo, en el que se tenía la intención de «divulgar» o explicar tan controvertido ente.

Empezando con esta última cuestión, señalemos lo que el matemático francés Pierre de Varignon escribió a Leibniz el 28 de septiembre de 1701:

> «Permítame Vd. que me tome la libertad de asegurarle mis más humildes respetos para hacerle saber que se está extendiendo por aquí un Escrito bajo su nombre en relación con la polémica que, como Vd. sabe, estoy manteniendo yo con el Sr. Rolle en torno al cálculo de Vd., que él califica de banal y paralogístico. Mr. l'Abbé Gallois, que es quien la agita, difunde aquí la especie de que Vd. había declarado que por diferencial o infinitamente pequeño no entiende más que una magnitud sin duda muy pequeña, pero siempre fija y determinada, algo así como es la Tierra con respecto al firmamento, o como un grano de arena respecto de la Tierra».

A lo que Leibniz responde en la importante carta a Varignon de 2 febrero de 1702:

> «Le estoy agradecido, Señor, a Vd. y a sus sabios, por hacerme el honor de añadir algunas reflexiones a lo que yo había escrito a uno de mis amigos a propósito de lo publicado en el *Journal de Trevoux* contra el cálculo de las diferencias y de las sumas. No recuerdo bien de qué expre-

siones me pude servir, pero mi intención fue señalar que no hay necesidad de hacer depender el análisis matemático de las controversias metafísicas ni de afirmar que haya en la naturaleza estrictamente líneas infinitamente pequeñas en comparación con las nuestras ni que, igualmente, haya líneas infinitamente más grandes que las nuestras (y, sin embargo, terminadas, pues a mí me ha parecido que el infinito, entendido en rigor, debe tener su fuente en lo interminado, sin lo cual no veo yo el modo de encontrar un fundamento propio para distinguirlo de lo finito). A fin, pues, de evitar estas sutilezas, he creído que para hacer sensible a todo el mundo el razonamiento, bastaba con explicar aquí el infinito por lo incomparable, es decir, bastaba concebir magnitudes incomparablemente más grandes o más pequeñas que las nuestras; esto nos proporciona todo lo que necesitamos en cuanto a grados de incomparables, puesto que aquello que es incomparablemente más pequeño es innecesario introducirlo en el mismo cómputo con aquello que es incomparablemente más grande que él; en este sentido, una partícula de la materia magnética que atraviesa un cristal no es comparable con un grano de arena, ni este grano con el globo de la Tierra, ni este globo con el firmamento».

Leibniz trataba de arreglar así el entuerto que había organizado en su afán de conciliar y presentar sus elucubraciones infinitesimales con ropaje finitista. Poco antes de su fallecimiento, en 1716, en una carta a Dangicourt, volverá con el tema:

> «*(...) que je ne croyois point qu'il y eût des grandeurs véritablement infinies ni véritablement infinitésimales, que ce n'etoient que des fictions, mais des fictions utiles pour abréger et pour parler universellement, comme les racines imaginaires dans l'Algèbre; qu'il faut concevoir, par exemple, (1) le diamètre d'un petit élément d'un grain de sable, (2) le diamètre du grain de sable même, (3) celui du globe de la Terre, (4) la distance d'une fixe de nous, (5) la grandeur de tout le système des fixes, comme, (1) une différentiel du second degré, (2) une différentiel du premier degré, (3) une ligne ordinaire assignable, (4) une ligne infinie, (5) une ligne infiniment infinie(...) Mais comme Mr. le Marquis de L'Hospital croyois que par là je trahissois la cause, ils me prièrent de n'en rien dire, outre ce que j'en avois dit dans un endroit des* Actes de Leipsic, *et il me fut aisé de déférer à leur prière.*»

Aquí, de nuevo, Leibniz va a mantener la no existencia real de los infinitésimos. Este fue uno de los temas que entretuvo la intensa correspondencia de Leibniz con Johann Bernoulli a lo largo del año 1698. Se encontraba entonces el joven matemático en Gröningen (Holanda) y mantenía paralelamente una relación epistolar con el influyente cartesiano y profesor de matemáticas Burcher de Volder, haciendo de intermediario entre éste y Leibniz, que era ya un consagrado matemático y filósofo de la naturaleza.

Leibniz y Bernoulli, que no llegaron nunca a encontrarse en persona, intercambiaron a través de sus cartas, ideas y objeciones en física y matemáticas, teñidas casi siempre de connotaciones metafísicas y teológicas. En el panorama de aquel final de siglo europeo, los dos grandes temas de discusión en el mundillo intelectual eran Newton y su portentoso Sistema del Mundo y el sorprendente pero eficaz cálculo diferencial de Leibniz. Entre los defensores, del no completamente aceptado cálculo, estaba Johann Bernoulli, que exigía de Leibniz más precisión sobre infinitésimos e infinitos... :

> «Por mi parte, lo que a mí me sorprende es que preguntes "si se da en algún modo una porción de materia que tenga con respecto a otra porción una razón inasignable, es decir, si se da una línea recta terminada por ambas partes y que, sin embargo, tenga respecto de otra recta una razón infinita o infinitamente pequeña", cuando estás admitiendo la división actual de la materia en partes infinitas en número. Yo siempre he creído y sigo creyendo que, si el cuerpo finito tiene partes infinitas en número, la más mínima de estas partes debe tener respecto del todo una razón inasignable o infinitamente pequeña». (de una carta de 23 de julio de 1698, de Bernoulli a Leibniz).

Comenzaba así una larga discusión sobre la naturaleza del infinitésimo:

> «No debe, pues, sorprenderte que yo dude acerca de la realidad de una cantidad infinitamente pequeña o infinitamente grande terminada por ambas partes. Pues, aunque admito que no existe porción alguna de materia que no esté actualmente dividida, no por ello se llega hasta elementos indivisibles o porciones mínimas ni a infinitamente pequeñas, sino sólo a perpetuamente menores y sin embargo ordinarias, lo mismo que incrementando se accede a perpetuamente mayores. De la misma manera que admito fácilmente que se dan siempre animálculos dentro de animálculos, sin que sea necesario que se den animálculos infinitamente pequeños o últimos. Si yo admitiera la posibilidad de estos infinitos o infinitamente pequeños, de los que tratamos entre nosotros, creería en su existencia.» (de una carta de 29 de julio de 1698, de Leibniz a Bernoulli).

Bernoulli vuelve con el tema en la segunda quincena de agosto de 1698:

> «(...) Tú admites que una porción finita de materia está ya actualmente dividida en partes infinitas en número, y sin embargo niegas que ninguna de estas partículas pueda ser infinitamente pequeña: ¿cómo se compagina esto? Porque, si ninguna es infinitamente pequeña, entonces cada una es finita; pero, si cada una es finita, resulta que todas tomadas en conjunto constituirán una magnitud infinita, contra la hipótesis. Imagina que dividimos en partes una magnitud determinada según la progresión geométrica descendente: 1/2, 1/4, 1/8, 1/16,........ Mientras el número de términos sea finito, admito que cada uno de ellos será también finito; pero si todos los términos existen actualmente, tendremos un infinitésimo y, además, todos los siguientes de magnitud infinitamente pequeña; es así que en todo cuerpo, en razón de su división, no la que se puede hacer sino la ya hecha, existen realmente y actualmente todos los términos de tal progresión. Luego, etc. Un cuerpo, por ejemplo, que describe una línea en su movimiento, existe en acto en cada uno de

> los puntos que yo pueda concebir en esa línea, y lógicamente también en dos de ellos que yo concibo infinitamente vecinos, con lo que se habrá atravesado ese pequeño intervalo en acto o partícula infinitamente pequeña. Y aunque tal partícula infinitamente pequeña no existiera separadamente, coexiste en el todo; por ello, me sorprende que digas que, si concedieras como posibles tales infinitos o infinitamente pequeños de los que tratamos, creerías en su existencia(...)».

Bernoulli termina esta carta a Leibniz pidiendo que se le demuestre la imposibilidad de la existencia del infinitésimo: «pues de la misma manera que no me veo yo capaz de probar su existencia, así igualmente por el contrario estoy completamente persuadido de que no se puede demostrar con argumento alguno su imposibilidad». Y Leibniz responde:

> «Cuando dije que, si yo creyera posibles los infinitamente pequeños e infinitos, admitiría su existencia, no dije que fueran imposibles, sino que dejé la cuestión a mitad de camino. Y cuando negué que se llegue a las porciones mínimas, fácilmente se podía entender que no hablaba sólo de nuestras divisiones, sino también de las que se verifican en acto en la naturaleza. Pues, aunque tengo por cierto que cualquier parte de materia está a su vez actualmente dividida, no pienso que de aquí se siga que se dé una porción de materia infinitamente pequeña, y menos aún se sigue que se dé la porción más ínfima de todas. Cualquiera que se moleste en redactar la consecuencia en forma, verá la dificultad. Pero tú dices: "si no hay ninguna partícula infinitamente exigua, entonces cada una es finita"; concedo. Y añades: "pero, si cada una es finita, entonces tomadas todas en conjunto constituirán una magnitud infinita". No concedo esta consecuencia; la concedería, si se diera alguna parte finita que fuera menor que todas las demás o al menos no mayor que toda otra; en tales casos, al haber más partes que cualquier número dado, ciertamente se originaría una cantidad mayor que toda otra. Ahora bien, consta que se da una parte finita menor que cualquiera dada».

De esta manera, con ese *no concedo,* Leibniz corrige con benevolencia lo que era un error impropio de un ya avezado matemático como es Bernoulli (¿o era una malévola trampa del joven matemático y excelente calculador al veterano filósofo?) Y continúa...

> «Has elegido precisamente un ejemplo muy apropiado. Pongamos, en efecto, que en una línea se dan en acto 1/2, 1/4, 1/8, 1/16.... y que existen en acto todos los términos de esta progresión; de aquí concluyes tú que se da el infinitésimo; yo, sin embargo, pienso que lo único que se sigue es que se da en acto una fracción finita asignable, cualquiera que sea su pequeñez. Lo mismo ocurre en el movimiento: aunque se atraviesen todos los puntos, no se sigue de aquí que se den dos puntos infinitamente vecinos y mucho menos que se den próximos entre sí. Así que concibo los puntos no como elementos de la línea, sino como límites o negaciones de ulterior progresión, es decir, como términos de la línea».
> (agosto-septiembre 1698 de Leibniz a Bernoulli)

Después de este excelente análisis, que podría haber cerrado la discusión, Bernoulli acepta la lección, pero no ve claro aun el tema e insistirá ahora con la existencia del término infinitésimo de la progresión (al igual que existe, por ejemplo, el término centésimo de la misma progresión). Pero esto no es ya un error y es como una premonición cantoriana...:

> «A punto de ausentarme en este momento de la ciudad, no me es posible responder por extenso, como quisiera, al contenido de tu carta; valga, al menos de momento, que yo también creo que no se da ni la cantidad máxima ni la mínima; que no puede demostrarse la existencia de los infinitos e infinitamente pequeños, pero que tampoco puede demostrarse que no existen; y que, sin embargo, es probable que existan. Si todos los términos de la progresión 1/2, 1/4, 1/8, 1/16.... existen en acto, entonces también existe el infinitésimo y todos los que le siguen; a mí me parece que esto puede deducirse rectamente de su existencia actual. Tampoco yo concibo los puntos como elementos de la línea, sino sólo como límites». (Septiembre de 1698 de Bernoulli a Leibniz).

Leibniz en su respuesta, parece ya algo indispuesto a continuar con el tema:

> «(...) Paso ahora a lo que en tu última carta son μεταφυσικώτερα. Razonas así: "Si todos los términos de la progresión 1/2, 1/4, 1/8, 1/16... existen en acto, entonces también existe el infinitésimo y los que le siguen". Respondo: la conclusión es correcta si se concede que se da realmente algún término infinitésimo o post-infinitésimo; pero yo no admito esto(...)» (20/30 de septiembre de 1698 de Leibniz a Bernoulli).

Y entonces, Bernoulli se queja, con razón, del laconismo de su maestro:

> «(...) No me parecen mal tus pensamientos μεταφυσικώτερα, incluso los admitiré fácilmente, como admito los δυναμικά, si al menos suscitas en mí una idea clara de los mismos. Porque, a este respecto, son demasiado lacónicas tus respuestas: más son definiciones que explicaciones. Me parece una contradicción decir que existen todos los términos de la progresión 1/2, 1/4, 1/8, 1/16... y que, sin embargo, los infinitésimos no son verdaderos términos; pues si los infinitésimos no existen, entonces los términos son sólo finitos y, por lo tanto, no existen todos, contra la hipótesis. Yo veo hacia dónde vas, a saber, que no puede llegarse al término infinitésimo porque, mientras continuamos la progresión, los términos son de magnitud finita. Pero la cuestión no es hasta dónde podemos nosotros llegar, ya sea en acto o conceptualmente, sino justamente hasta dónde ha llegado ya la naturaleza misma. Tú admites que todos los términos existen simultáneamente; luego también el infinitésimo existe, y existe realmente, esto es, verdaderamente se da (est); pues, si no se diera (*esset*), no existiría (*existeret*)(...)» (8 de noviembre de 1698 de Bernoulli a Leibniz).

Bernoulli vuelve con su idea de la existencia del término infinitésimo en esa progresión infinita, pero Leibniz que seguramente empieza a estar cansado de la discusión, impone de nuevo su autoridad:

> «Dices que mis pensamientos acerca de las cosas μεταφυσικώτερα son demasiado lacónicos; pero, si no me equivoco, me esforcé en hablar con exactitud y concisión. De todas maneras, si todavía quedan algunas dudas, trataré de responder y resolverlas. Dices que ofrecí definiciones más que explicaciones; ojalá se aportaran siempre definiciones, pues en ellas se contienen virtualmente las explicaciones. Por lo que se refiere a los términos infinitésimos, a mí me parece que no sólo no podemos nosotros llegar a ellos, sino que ni siquiera se dan en la naturaleza, o sea, que no son posibles; de lo contrario, como ya dije, si admitiera yo que son posibles, concedería que existen. Es decir, habría que ver bajo qué razón se puede demostrar que es posible, por ejemplo, una línea recta infinita y, sin embargo, terminada por ambas partes (...)» (16 de noviembre de 1698 de Leibniz a Bernoulli).
>
> La discusión parece eternizarse...
>
> «En cuanto a los términos infinitésimos, o tú no me entiendes a mí o yo no te entiendo a ti. Yo digo: "si los infinitésimos no existieran en la naturaleza, entonces, en efecto, el número de términos sería sólo finito; luego no existirían todos, contra la hipótesis". Pero aquí yo planteo el siguiente dilema: "El número de términos existentes en la naturaleza o es finito o es infinito; no hay posición tercera. Si es finito, entonces no existen todos, pues podrían darse más; y si es infinito, entonces existe el infinitésimo y todos los que le siguen". Quizás digas tú que se dan términos infinitos en número y, sin embargo, cada uno de ellos de magnitud finita, como es manifiesto en la progresión 1/2, 1/4, 1/8, 1/16... donde necesariamente hay infinitos términos de magnitud finita; porque si los términos de magnitud finita fueran (en número) finitos, entonces el número de términos estaría determinado, lo que es absurdo. Pero, si consideras la progresión desde otro aspecto, a saber, en cuanto que, si los términos son infinitos en número existe necesariamente el infinitésimo, concluiré entonces que éste deberá ser necesariamente infinitas veces menor que el término finito, esto es, deberá ser infinitamente pequeño, donde necesariamente hay infinitos términos de magnitud finita; porque si los términos de magnitud finita fueran (en número) finitos, entonces el número de términos estaría determinado, lo que es absurdo. (6 de diciembre de 1698 de Bernoulli a Leibniz).

Bernoulli insiste una vez más en la existencia del término infinitésimo en la progresión, porque de serle aceptada esta premisa, quedaría probada la existencia de un término que sería infinitamente pequeño, esto es, un infinitésimo. Leibniz acepta que la clave de la cuestión es esa:

> «La cuestión de los infinitésimos se reduce a probar la proposición que tú utilizas: "si en la progresión 1/2, 1/4, 1/8, 1/16....el número de términos es infinito, entonces existe el infinitésimo". Pero, ¿qué ocurriría si cada uno de ellos fuera finito y distante del primero en un número inasignable de intervalos? No veo yo qué dificultad hay en concebir una

serie compuesta nada más que de términos de magnitud finita, pero infinitos en número». (17 de diciembre de 1698 de Leibniz a Bernoulli).

Bernoulli insiste...:

«La proposición: "si en la progresión 1/2, 1/4, 1/8, 1/16....existen términos en número infinitos, entonces existe el infinitésimo" (que, según tú, todavía ha de ser probada para demostrar la existencia de una cantidad infinitamente pequeña), la pruebo fácilmente así: si existen diez términos, existe el décimo; si existen cien términos, existe el centésimo; si los términos son mil, existe el milésimo; luego si los términos son en número infinitos, existe el infinitésimo». (6 de enero de 1699 de Bernoulli a Leibniz).

Leibniz pretendiendo olvidar la cuestión, hace acopio de su extremada tolerancia y responde de nuevo, como post-data en su nueva carta. Correspondencia entre ambos que, recordemos, trata fundamentalmente de la Dinámica, y en la que el tema de los infinitésimos es colateral:

«PS. ¡Casi me olvidaba de la cuestión de si existen los infinitésimos! Dices tú: "puestos diez términos, se da el décimo; luego puestos infinitos términos, se da el infinitésimo". Yo dudo de que se siga esto. Pues podría uno decir quizás que no vale el argumento desde lo finito a lo infinito, ya que, cuando se dice que se dan los infinitos, no se dice que se da de todos ellos un número terminado, sino que se dan más que cualquier número terminado. Por otra parte, con el mismo derecho que tú podría yo concluir: entre diez números se da el último, que es el máximo de todos ellos; luego entre todos los números se da también el último, que es el máximo de todos los números; pero tal número, creo yo, implica contradicción. Tú mismo no respondes a mi objeción cuando te hacía ver que puede comprenderse una serie infinita compuesta de números meramente finitos. Pues es manifiesto que, aunque de acuerdo contigo pongamos una serie compuesta de finitos (en magnitud) y a la vez infinitos (en número), puesto esto así se puede entender una parte que conste de meros finitos (en magnitud), y omitir la parte restante compuesta de infinitos (en magnitud). Pero esta serie de meros finitos (en magnitud) sería ella misma infinita (en multitud), y sin embargo no tendría ningún término infinitésimo». (13/23 de enero de 1699 de Leibniz a Bernoulli).

Bernoulli responde con lo mismo de lo mismo, pero esta vez mal interpreta a Leibniz y le «obliga» a éste a admitir la existencia de un número infinito:

«A mí me parece clarísimo: si se dan términos infinitos, se dará también el término infinitésimo (no digo el último) y los que le siguen. Me sorprende que no quieras admitir una magnitud infinitamente pequeña, cuando te ves obligado a admitir el número infinito, que recuerdo en otra ocasión negaste. Adiós y cuídate». (11 de febrero de 1699, de Bernoulli a Leibniz).

Finalmente, Leibniz responde con una frase lógicamente contundente en la que no falta ni sobra una palabra, y la discusión se cierra:

> «No respondes al argumento que yo alegué, según el cual, si se dan términos infinitos, no se sigue que se dé el infinitésimo, porque es lícito concebir una serie de infinitos términos compuesta de términos meramente finitos u ordinarios en una progresión geométrica decreciente. Yo admito una multitud infinita, pero tal multitud no hace un número o una totalidad; no es más que el hecho de que hay más términos que los que numéricamente puedan asignarse, exactamente como ocurre que se da la multitud o compuesto de todos los números sin que tal multitud sea un número o una totalidad». (21de febrero de 1699, de Leibniz a Bernoulli).

Subyace en toda esta discusión el problema, vivo desde Aristóteles, de la existencia o no del infinito en acto, del infinito actual. Y la afirmación de Leibniz, ya reseñada (ver pag.5), de estar entusiásticamente a favor de la existencia del infinito actual en la Naturaleza, conduce a la duda a Bernoulli, que no ve la razón por la que negarla cuando de matemáticas se trata. Georg Cantor, el dominador del infinito actual, a finales del siglo XIX criticará ásperamente a Leibniz por su ambigüedad en relación a este tema.

Por otra parte, a la pregunta de si Leibniz pudo inspirarse en la idea de infinitésimo para concebir la de mónada, pasando de la matemática al dominio de la metafísica, los expertos leibnizianos asienten con reservas. Para un pensador como Leibniz, en el que la analogía y la expresión juegan un papel tan decisivo, es bastante obvio que la capacidad de trascender la oposición finito-infinito del cálculo diferencial irradiase su poder a la física y a la metafísica. Y un ente como la mónada que siendo el constituyente inextenso de la materia, no es un punto matemático, guarda un notable parecido con un ser que no siendo un número participa de lo cuantificable, como es un infinitésimo. Pero hay que subrayar como hace Ross, un experto en la metafísica de Leibniz (ver bibliografía), que las mónadas no fueron nunca para el pensador alemán infinitésimos o partes infinitesimales de la materia, porque la materia, que es cuantificable, en tanto que tal, se rige por la matemática y una parte infinitesimal de materia no es algo concreto, no existe. Existe, eso sí, la posibilidad de la divisibilidad infinita.

5. Las fuerzas vivas.

Seguramente el concepto más significativo de la ciencia del siglo XVII es el de fuerza, estrechamente ligado a los temas del movimiento y de la constitución de la materia, este último el gran reto de la filosofía natural.

En la primera mitad del siglo, la extremada voluntad de Descartes de expulsar cualquier resto de vitalismo renacentista de la construcción de su Sistema del Mundo, le llevó a concebir la materia como algo inerte, sin vida, pura extensión, y en consecuencia, su Física —tratado de los seres materiales— es una geometría aplicada, con la que mediante ideas claras y distintas afrontar la verdadera explicación de los fenómenos de la incierta Realidad. Y si la materia es extensión y todo lo extenso es materia más o menos sutil, entonces no existe el vacío y el espacio cartesiano es un Pleno.

En los *Principios de la Filosofía*, Descartes exponía las leyes de la Naturaleza, los principios de las cosas materiales, encabezadas —¿cómo no?— por Dios, primera causa del movimiento, que estaba conservado siempre en igual cantidad en el Universo por su divina providencia. De perseverancia y conservación tratan también las dos primeras de sus leyes, en las que —contrariamente a Aristóteles— se privilegia el movimiento rectilíneo frente al hasta entonces predilecto —incluso por el propio Galileo— movimiento circular. Y es que según estas dos leyes las cosas perduran en el estado en que están y una vez en movimiento tienden a continuar moviéndose en línea recta y por tanto aquellos cuerpos que por alguna razón se mueven circularmente tienden a escapar del centro del círculo que describen. Esta «tendencia» centrífuga jugará un papel fundamental en su posterior explicación de los fenómenos de la gravedad, del movimiento de un rayo de luz y de los movimientos orbitales de los planetas, que tendrían lugar todos ellos como efectos centrífugos de torbellinos o movimientos vorticoides de materia sutil.

Estas dos primeras leyes cartesianas equivalen descriptivamente al principio de inercia newtoniano:

> «*Every body continues in its states of rest, or of uniform motion in a right line, unless it is compelled to change that state by forces impressed upon it.*»

Pero aquí, en esta formulación, no se nombra el movimiento circular y sí se nombra la fuerza impresa, que jugará un papel primordial en la mecánica newtoniana. Pero volviendo a Descartes, ¿qué era una fuerza para él?, pues hay que decir que no la definió nunca, porque seguramente pensaba que no era un concepto claro y distinto, aunque usara la palabra fuerza en numerosas ocasiones y con distintos significados, tanto en sus obras publicadas como en la abultada correspondencia que de él se conserva: fuerza de percusión de un martillo, fuerza de un rayo de sol, fuerza de una medicina, la fuerza de una mirada o la de un fuego, y muchas más, pero la noción que interesa a la dinámica es la de *fuerza de un cuerpo en movimiento,* que Descartes mide como el producto de su cantidad de materia o masa (¡no es aún la masa en sentido newtoniano¡) por su velocidad (¡no es aún la velocidad vectorial newtoniana¡). La cantidad de movimiento: *m.v,* con las precisiones anteriores, que la convierten en el producto del volumen del cuerpo por la celeridad o velocidad escalar, sería lo que mide la fuerza de un cuerpo en movimiento, y según Descartes, se conservaría en los choques. Esta definición de fuerza y la pretendida conservación de la misma en los choque serán duramente criticadas por Leibniz.

En los *Principia Mathematica* (1687), con los que Newton había conseguido finalmente unificar las fisicas terrestre y celestial, se propone, en directa relación con el principio de inercia, el concepto de «fuerza impresa», más matemático que físico, que se impondrá a otras definiciones, como las de Descartes y Leibniz. Para la dinámica newtoniana —y para la física de hoy— fuerza, o fuerza impresa, era en palabras del propio Newton:

> «*An impressed force is an action exerted upon a body in order to change its state, either of rest, or of uniform motion in a rigth line.*»

Así pues, fuerza ejercida sobre un cuerpo, será para Newton una acción exterior al cuerpo que consigue cambiar su estado de reposo o de movimiento uniforme rectilíneo. Y sólo a una tal acción podemos llamarla fuerza. Conviene pues señalar que la llamada fuerza de inercia no es realmente una fuerza aunque muchas veces se la designe así. La inercia es la tendencia de un cuerpo a permanecer en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme (1ª ley de Newton), pero puede ser considerada también como una especie de «fuerza» innata en el cuerpo que reacciona a una fuerza exterior (3ª ley de Newton). Puede estar en un cuerpo que se mueve (en línea recta y velocidad constante) y entonces se asemeja al «ímpetus» medieval, o ser simplemente la resistencia a una fuerza exterior. Así, en palabras de Newton:

> «*The innate force of matter, is a power of resisting, by which every body, as much as in it lies, continues in its present state, whether it be of rest, or of moving uniformly forwards in a right line.*»

Pues bien, la concepción leibniziana de fuerza difiere completamente de la anterior. Para Leibniz, fuerza es lo que soporta el movimiento y la inercia es, como en Kepler, la natural resistencia de los cuerpos al movimiento. Leibniz no considera el movimiento rectilíneo uniforme como un estado similar al reposo. Aristotélicamente, considera que todo movimiento depende de una fuerza activa y esto es válido incluso para el movimiento rectilíneo y uniforme. Para Leibniz el cambio ocurre como resultado de una fuerza interna inmanente y no —como pretende Newton— mediante la acción de una fuerza exterior. Leibniz se mantiene fiel a uno de los preceptos de la filosofía natural mecánica: la no existencia de fuerzas a distancia. y está obligado por ello a continuar con el uso de los vórtices para explicar fenómenos como el del movimiento orbital de los planetas alrededor del Sol.

Según explica Richard Westfall, de manera brillante y esclarecedora, en sus artículos sobre el movimiento circular y el desarrollo de la dinámica en el siglo XVII (ver bibliografía), tienen que pasar tres cuartos de siglo desde aquel «astronómico» año de 1609 en el que Kepler publicó su *Astronomia Nova* y en el que Galileo obtuvo las ecuaciones del movimiento acelerado —al tiempo que dirigía su catalejo a los cielos—, para que, Newton dejando la estricta concepción mecanicista cartesiana y siguiendo la vía galileana de una matematización no constreñida por la metafísica implícita en aquella, pudiese construir la más eficaz y plausible de las Dinámicas posibles en aquellos momentos, la que conseguiría explicar, o al menos dominar y cuantificar de manera excelente, dos fenómenos aparentemente tan dispares como el de la caída de una manzana en la superficie de la Tierra y el de la rotación lunar sobre la Tierra. Y así pues, desde entonces, para Newton y para una maravillada humanidad «la manzana cae como cae la Luna».

Y ello fue posible por la sabia conjunción de tres hechos teóricos, el primero y fundamental de los cuales fue el de la interpretación del movimiento circular. Para Descartes y para la mayoría de los científicos continentales el movimiento circular era un *continuo equilibrio* entre el propio movimiento circular y su tendencia inercial por la tangente que se expresa o necesita de la fuerza centrífuga compensadora. Para Newton, por el contrario, el movimiento circular era un *continuado desequilibrio* entre la fuerza inercial rectilínea y una fuerza centrípeta que «lo desvía del buen camino». Y esto, unido al principio de inercia en su formulación newtoniana y a su definición de fuerza o segunda ley de Newton produjeron el milagro. Si bien es verdad que había que aceptar unas casi «milagrosas» fuerzas gravitatorias.

Y en contra de lo que había dicho Aristóteles, un *movimiento rectilíneo* (uniformemente acelerado), el de la galileana caída de la manzana, iba a ser dinámicamente *equivalente* a un *movimiento circular* (uniforme), que también va a ser acelerado a pesar de tener una «*celeritas*» constante —porque así lo decidió Newton—, porque el continuo cambio de dirección, el desvío de lo rectilíneo, implicaba una fuerza newtoniana o lo que es lo mismo una aceleración.

No obstante el éxito newtoniano, Leibniz es también el constructor de otra Dinámica, estrechamente ligada a su cálculo diferencial y a su Metafísica: la dinámica de la «fuerza viva». En el importante *Discurso de Metafísica,* publicado en 1686, inmediatamente antes de la publicación de los *Principia* de Newton, Leibniz dedicó seis de los treinta y seis pequeños capítulos o apartados a la física del universo y a la finalidad cósmica, a la nueva definición de fuerza, en directa relación con lo que designó «*memorable error de Descartes*», o sea, la definición de fuerza de un cuerpo en movimiento como la cantidad de movimiento: el producto de la masa del cuerpo por la velocidad, no considerada ésta vectorialmente: $m.|v|$. Esto lo cuenta Leibniz en el capítulo 17, que titula de la siguiente manera:

> «Ejemplo de una máxima subalterna o ley de la naturaleza donde se demuestra que Dios conserva siempre, regularmente, la misma fuerza pero no la misma cantidad de movimiento contra los cartesianos y otros varios».

La explicación leibniziana, del «desmán» cartesiano, en pocas palabras sería la siguiente: sean dos cuerpos, uno de los cuales es cuatro veces más pesado que el otro. Y se los hace caer de alturas inversamente proporcionales a sus pesos. Leibniz supone que la fuerza adquirida por cada cuerpo cuando tocan el suelo les permite remontar a su punto de partida. Por un principio fundamental de la Estática, será necesaria la misma fuerza para elevar dos cuerpos a alturas inversamente proporcionales a sus pesos. Pero por la ley de caída libre de Galileo, la velocidad del cuerpo más ligero cuando llega al suelo es doble de la del otro cuerpo cuatro veces más pesado. Por tanto, la cantidad de movimiento de éste es doble de la del primero. Consiguientemente, la cantidad de movimiento cartesiana no puede ser igual a la fuerza de esos cuerpos en movimiento.

Comenzaba así una larga y áspera disputa que se iba a mantener durante setenta años. Para Leibniz la verdadera expresión de la fuerza de un cuerpo en movimiento sería $m.v^2$, la *fuerza viva.* La polémica entre cartesianos de una parte —a la que se unirían los newtonianos tras la polémica Leibniz-Clarke de 1717— y leibnizianos o defensores de las «fuerzas vivas», como Jean Bernoulli, William s'Gravesande y Mme du Châtelet, recorre gran parte del siglo XVIII, hasta que d'Alembert en su *Traité de Dynamique* y posteriormente Boscovich «resolvieran» la disputa concluyendo, en expresión de d'Alembert que se trataba *«de una disputa de palabras, indigna de ocupar la atención de los filósofos por más tiempo».*

Ya Huygens, en 1656, aunque no se publicara hasta bastante más tarde, había señalado el error de Descartes, demostrando que la fuerza considerada a la manera cartesiana no se conservaba en un choque elástico y que lo que realmente se conservaba eran dos cantidades o números: el producto de la cantidad de materia por el cuadrado de la velocidad y el producto de la cantidad de materia por la velocidad considerada en una misma dirección. Además, Huygens consiguió probar una proposición que posteriormente calificaría como una «admirable ley de la Naturaleza»: el movimiento del centro de gravedad común de un sistema de cuerpos que chocan entre sí permanece igual después de la colisión.

Pero fue Leibniz, quien recogió el resultado obtenido por Huygens y situó la cuestión en un marco metafísico, dotándolo —como dice Westfall— de una dimensión cósmica. Leibniz osó proponer, en pleno auge del pensamiento cartesiano, otra definición de fuerza de un cuerpo en movimiento: la de la fuerza viva: $m.v^2$, pues como dice en el capítulo 18 del mismo *Discurso de Metafísica:*

> «Esta consideración de la fuerza, distinta de la cantidad de movimiento, es bastante importante, no sólo en física y en mecánica, para encontrar las verdaderas leyes de la naturaleza y reglas de movimiento, y para corregir incluso varios errores de aplicación que se deslizan en los escritos de algunos hábiles matemáticos, sino también en la metafísica, para comprender mejor los principios, pues el movimiento, si no se considera en él más que lo que comprende precisa y formalmente, es decir, un cambio de lugar, no es una cosa enteramente real, y cuando varios cuerpos cambian de situación entre sí no es posible determinar por la simple consideración de estos cambios a quién entre ellos, hay que atribuir el movimiento o el reposo...»

Aquí Leibniz está refiriéndose —pensamos— no solo a la relatividad del movimiento rectilíneo, ya señalada por Descartes, sino también a la del movimiento curvilíneo o circular, al considerar éste como formado por una infinidad de movimientos rectilíneos uniformes. Una antigua idea, ya concebida por el sofista Antifonte, denostada por Aristóteles y usada heurísticamente por Arquímedes e incluso por el propio Galileo en su último libro, *Discurso sobre dos nuevas ciencias.* Pero ahora el refrendo del cálculo infinitesimal permite darle una legitimidad nueva.

Pero sigue diciendo Leibniz en su *Discurso de Metafísica*:

> «...así, nos vemos forzados a restablecer algunos seres o formas que ellos (los modernos) han desterrado...»

Y esos seres son las formas sustanciales aristotélicas, porque:

> «...aunque todos los fenómenos particulares de la Naturaleza se puedan explicar matemática o mecánicamente por los que los entienden, los principios generales de la naturaleza corporal y de la mecánica misma son más bien metafísicos que geométricos y corresponden más bien a

algunas formas o naturalezas indivisibles, como causas de las apariencias, que a la masa corporal o extensión».

Leibniz tiene entonces, en 1686, cuarenta años y entra en su etapa de madurez pertrechado ahora con una metafísica que ha elaborado en contacto con la realidad y que se apoya en una terna: Dios, razón y cálculo infinitesimal. Dios es la legitimidad, la condición previa que nos permite confiar en que la búsqueda del conocimiento de las cosas y de la estructura de la realidad tiene un sentido. La razón, es la proveedora de los básicos principios-pilares de aquella estructura. El cálculo con los infinitos, es el nuevo y trascendental instrumento de la matemática, forjado con el más leibniziano de los principios, el de continuidad: análisis infinitesimal que nos deja descubrir lo íntimo de los entes matemáticos, que permitirá a su vez mediante la analogía y la expresión analizar la realidad y descubrir sus componentes primarios.

Pero sucede que muy poco tiempo después Isaac Newton va a publicar su grandiosa obra, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.* Y Leibniz, admirado por la pericia del matemático, piensa tras su lectura, lo engañoso que puede ser para la comprensión de la física la retórica del discurso matemático, la mera trasposición de lo ideal a lo actual. Dos años más tarde Leibniz publicará su ensayo *Tentamen de Motuum Coelestium Causis,* en el que pretenderá dar las verdaderas causas de los movimientos celestes. Domenico Bertoloni-Meli ha explicado brillantemente (ver bibliografía) las vicisitudes dialécticas de estos dos grandes genios en esta tesitura, personajes, que a decir verdad, tenían en común no sólo la misma fe religiosa y el haber inventado independientemente el cálculo infinitesimal, sino además una profunda insatisfacción con el nuevo modelo mecanicista cartesiano, que les hace volver atrás en la Historia (?) y arropar sus explicaciones del Mundo con las en esos momentos denostadas formas sustanciales y «cualidades ocultas». Aunque Leibniz no oculta su Metafísica y el altísimo papel que ella juega en su *Weltaschauung.*

El historiador francés Jacques Le Goff, apasionado defensor de los valores del Medioevo, sitúa el comienzo de la «modernidad» en la Revolución francesa y en la Revolución industrial. Si aceptáramos esta clasificación cronológica, entonces Newton y Leibniz serían los dos más excelsos representantes de esa ciencia físico matemática, teologizada, hermética y medieval que los modernos han calificado de revolucionaria.

Y para terminar este apartado, diré que el concepto de fuerza en Leibniz es uno de los más significativos nexos entre matemática, dinámica y metafísica. En la dramática correspondencia que Leibniz mantuvo con el cartesiano De Volder entre 1698 y 1706 (ver en la bibliografía, Orio de Miguel), Leibniz usó una de sus metáforas favoritas para indicar esto último, pues la medida de las fuerzas,

> «es la puerta por la que hemos de pasar de lo imaginable a lo inteligible, y así liberarnos de las falsas nociones de extensión, número, etc, de los cartesianos y descubrir el hondo hontanar de la verdadera noción de la sustancia y de los cuerpos.»

6. Conclusiones

> « La matemática es sólo la puerta para entrar en el santuario de lo real.» De una carta de Leibniz a Jean Bernoulli.

> «Para llegar al inferior, imperfecto y corporal mundo fueron necesarios muchos grados que interpuestos entre él y la infinita causa primera lo van sucesivamente acomodando y proporcionando a su humildad y flaqueza.» Proposición sexta del libro primero de *La puerta del cielo,* de Abraham Cohen de Herrera (1570-1623), ibérico cabalista hebreo.

El 11 de septiembre de 1716, dos meses antes de su fallecimiento, Leibniz escribió una carta desde Hannover a un matemático francés, Pierre de Dangicourt y en ella relacionaba las mónadas y el cálculo infinitesimal, la realidad de la física y el mundo abstracto de la geometría, la metafísica y las matemáticas. Después de apreciar el interés de «un espíritu tan matemático» por la filosofía (como se le suponía a Monsieur de Dangicourt), Leibniz hace un resumen de su monadología, núcleo de la armonía preestablecida, en la que las mónadas responden a las leyes de las causas finales o de los apetitos, perfectamente acordes con el reino de las causas eficientes, que son las que verdaderamente rigen los fenómenos. Llegado a este punto, Leibniz dejaba la metafísica para adentrarse en el reino de las matemáticas, en donde parece que las cosas son más rígidas:

> «*...Je dis donc, que la matiére qui est quelque chose d'actuel ne resulte que des monades, c'est à dire, du substances simples indivisibles, mais que l'etendue ou la grandeur géométrique n'est point composée des parties possibles qu'on y peut seulement assigner, ni résoluble en points, et que les points aussi ne sont que des extremités et nullement des parties ou composans de la ligne*».

Y es que, según Leibniz seguía diciendo a Dangicourt, el *continuo* matemático, geométrico, no está compuesto de puntos geométricos, de la misma manera que no existen en las matemáticas los infinitésimos ni las cantidades infinitas. En las Matemáticas —que son como un juego con ciertas normas— Leibniz, aristotélicamente, pensaba que existen unas reglas que hay que cumplir. Lo que no quiere decir que no podamos inventar *ficciones útiles* para resolver problemas o aplicar técnicas heurísticas como ya hiciera Arquímedes para encontrar resultados y posteriormente demostrarlos de manera conveniente. Pero, estrictamente, en las matemáticas hay que mantener el rigor o ... de lo contrario, hay que cambiar las reglas del juego. Que es lo que harían más adelante Georg Cantor y Abraham Robinson para dar cabal cabida en el cálculo infinitesimal a infinitos e infinitésimos respectivamente. Aunque lo que no se permite Leibniz en la matemática, se lo permitirá en la metafísica, territorio sin fronteras, porque la Realidad no es un juego, o al menos no conocemos aún sus reglas con certeza y ahí sí que podemos dar rienda suelta a nuestra imaginación (para Leibniz mejor sería emplear la palabra intelección), que al calor de la matemática construirá con las analogías entramados bien enlazados que nos convertirá por momentos en dioses creadores.

Abraham Robinson, el autor del *Análisis no-standard,* que daría finalmente estatus formal, legalidad matemática rigurosa, a los números infinitésimos e infinitos, dirá lo siguiente en una conferencia sobre «matemática no-arquimediana», impartida en Berkeley, en 1963:

> «Leibniz quiso basar su cálculo diferencial e integral en un sistema de números que incluyese a cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes. Más precisamente, consideró los nuevos números como elementos ideales que tendrían las mismas propiedades que los números reales comunes y mantuvo que su introducción era útil para el *ars inveniendi*».

No es nada seguro que Leibniz quisiese lo que Robinson quería o pensaba que quisiese, porque en aquel tiempo ni siquiera el «*status*» de número irracional estaba claramente establecido. La voluntad de convertir en números, semejantes a los naturales, —como los que Dios manda, según el matemático alemán Kronecker— a otras entidades creadas por los humanos en su afán por numerizar: negativos, imaginarios, irracionales, cuaterniones, trascendentes, p-ádicos, transfinitos, etc. llevó su tiempo histórico... y los nuevos productos de la creación matemática, heraldos de la tecnología, poblaron las mentes de los nuevos exploradores de la Realidad.

Bibliografía

AITON, E. J. *The Vortex Theory of Planetary Motions,* Elsevier, New York, 1972.
AITON, E. J. *Leibniz, una biografía.* Alianza Universidad. Madrid, 1992.
ARANA, Juan. «Sobre las relaciones entre mecánica y metafísica: concepto y medida de fuerza», en *Actas del Congreso Internacional Ciencia, Tecnología y Bien común. La actualidad de Leibniz.* Valencia, 2001
BERTOLONI-MELI, Domenico. *Equivalence and Priority: Newton versus Leibniz,* Oxford University Press, New York, 1993.
BLAY, Michel, *La naissance de la Mécanique Analytique.* PUF, Paris, 1992.
BLAIS, Michel, *Les raisons de l'Infini.* Gallimard. Paris, 1993.
BOURBAGE, Frank y CHOUCHIAN, Nathalie. *Leibniz et l'Infini.* PUF, Paris, 1993.
BRUNSCHVICG, L. *Les Étapes de la Philosophie Mathématique,* A. Blanchard, Paris, 1972.
COUTURAT, Louis. *La Logique de Leibniz,* Alcon, Paris, 1902.
CHÂTELET, Emilie du, *Institutions de Physique,* Paris, 1740.
CHÂTELET, Emilie du, «Réponse a la Lettre que M. de Mairan lui a écrite le 18 de fevrier 1741 sur la question des Forces Vives», Bruxelles, 1741.
DAUBEN, Joseph. *Abraham Robinson: The Creation of non-standart Analysis.* Princeton University Press. 1995.
KITCHER, Philip. «Fluxios, Limits, and Infinite Littlenesse. A study of Newton's presentation of the Calculus». *Isis.* Vol. 64, nº 1. 1973.
LAMARRA, Antonio, a cura de. *L'Infinito in Leibniz. Problemi e Terminologia. Simposio Internazionale.* Edizioni del Ateneo, Roma, 1990.
MAIRAN, Dortous de, «Mémoire sur les Forces Vives», *Academie Royale de Sciences,* Paris, 1728.
MAIRAN, Dortous de, « Lettre a Madame du Châtelet sur la question des Forces Vives, en réponse aux Objections qu'elle lui a fait sur ce sujet dans ses *Institutions de Physique»,* Paris, 1741.
DURÁN, Antonio. *Historia, con personajes, de los conceptos del Cálculo.* Alianza Universidad, Madrid, 1996.
DURÁN, Antonio. *La polémica sobre la invención del cálculo infinitesimal: Escritos y documentos.* Crítica, Barcelona, 2006.

FICHANT, Michel. *Science et Métaphysique dans Descartes et Leibniz.* PUF, Paris, 1998.
FONTENELLE, de B. Le Bovier. *Elémens de la géométrie de l'infini.* Paris, 1727.
GARBER, Daniel. *La Physique Métaphysique de Descartes.* PUF, Paris, 1992.
GARBER, Daniel. *Corps Cartesians.* PUF, Paris, 2004.
GARBER, Daniel. «Leibniz and the foundations of Physics: The middle years», en *The Natural Philosophy of Leibniz,* (ed.) Okruhlik K. y Brown J. Reidel, 1985.
GAUKROGER, Stephen. *Descartes: an intellectual biography.* Oxford U. P., 1995.
GIUSTI, Enrico y CANTELLI, Gianfranco. *La disputa Newton-Leibniz sull'Analisi.* Universale Bollati Boringhieri, Torino, 2006.
HACKING, Ian. «Why motion is only a well-founded phenomenon», en *The Natural Philosophy of Leibniz,* (ed.) Okruhlik K. y Brown J. Reidel, 1985.
HANKINS, Thomas L., «Eighteenth-century attempts to resolve the *Vis Viva* controversy». *Isis,* 1965, *56*: 281-297.
HERIVEL, John. *The background of Newton's Principia.* Oxford, 1965.
HUTCHISON, Keith. «What Happened to Occult Qualities in the Scientific Revolution?». *Isis,* 1982, 73: 233-253.
ILTIS, Carolyn, «Leibniz and the *Vis Viva* controversy». *Isis,* 1971*, 62:* 21-35.
ILTIS, Carolyn, «The decline of Cartesianism in Mechanics: The Leibnizian-Cartesian debates». *Isis,* 1973, *64:* 356-373.
ILTIS, Carolyn, «Madame du Châtelet's Metaphysics and Mechanics». *Stud. Hist. Phil. Sci.* 8 , nº1, 1977.
L'HOSPITAL, de Marqués, *L'Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes.* Paris, 1696.
KITCHER, Philip. «Fluxions, Limits and Infinite Littlenesse». A Study of Newton's presentation of the Calculus. *Isis,* 64, 1, pp 33-49. 1973.
KNOBLOCH, Eberhard. «The Infinite in Leibniz's Mathematics.The Historiographical Method of Comprehension in context» , *Trends in the Historiography of Science.* Kostas Gavroglu (ed.). Kluwer. 1994. KNOBLOCH, Eberhard. «Galileo and Leibniz: Different Approaches to Infinity», Arch. Hist. Exact. Sci. 54, 1999.
KNOBLOCH, Eberhard. «Leibniz's rigorous foundation of infinitesimal geometry by means of Riemannian sums». *Synthese.* Kluwer, 2002.
LEIBNIZ, Gottfried W., *La naissaince du calcul différentiel. 26 Articles des* Acta Eruditorum. Marc Parmentier (ed). Mathesis. Vrin. Paris, 1995.
LEIBNIZ, Gottfried W., *Essais de Theodicée.* Garnier Flammarion, Paris, 1969.
LEIBNIZ, Gottfried W., *Escritos de Dinámica.* Escrito preliminar y Notas, de Juan Arana, Tecnos, Madrid, 1999.
LEIBNIZ, Gottfried W., *Análisis Infinitesimal.* Estudio preliminar, de Javier de Lorenzo, Tecnos, 1987.
LEIBNIZ, Gottfried W., *Monadología y discurso de Metafísica.* Sarpe, 1984.
Mc.MULLIN, Ernan. *Newton on Matter and Activity.* Univ. of Notre Dame Press. Indiana. 1978.
MERCER, Christia. L*eibniz's Metaphysics. Its Origin and Development.* Cambridge University Press. 2001.
ORIO DE MIGUEL, Bernardino. *«Leibniz: Matemáticas, Física, Metafísica. Sobre las correspondencias con Johann Bernoulli, Burcher de Volder y Jacob Hermann».* Internet
ORIO DE MIGUEL, Bernardino. «Some Hermetic Aspects of Leibniz's Mathematical Rationalism» en *Leibniz: What kind of Rationalist?.* Ed. Marcelo Dascal. Springer. 2008.
PHEMISTER, Pauline. *Leibniz and the Natural World.* Springer, 2005.
RACIONERO, Quintín y ROLDÁN, Concha. *G. W. Leibniz. Analogía y Expresión.* Ed. Complutense. Madrid. 1995.
ROSS, Mc. George. «Are there real infinitesimals in Leibniz's metaphysics» en *L'Infinito in Leibniz*, (ed.) Antonio Lamarra. Roma, 1986.
ROSS, Mc. George. «Leibniz and de Volder on the Infinitelly Small in Metaphysics». *Studia Leibnitiana,* Sonderheft, 14, 1986.
SELLÉS, Manuel. «Isaac Newton y el infinitesimal». *Theoria,* Vol. 14/3, 431-460, 1999.
SOLÍS, Carlos y SELLÉS. Manuel. *Historia de la Ciencia.* Espasa C. 2005.
TARDE, Gabriel. *Monadologie et Sociologie.* Institut Sinthélabo. 1999.
VARIGNON, M. *Eclaircissements sur l'Analyse des infiniments petits.* Paris, 1725.
WESTFALL, Richard. *Force in Newton's Physics.* Elsevier New York 1971
WESTFALL, Richard. «Circular Motion in Seventeenth-Century Mechanics». *Isis,* Vol.63, nº 2 184-189. 1972.

WESTFALL, Richard. *The construction of Modern Science.* Cambridge University Press, 1977.
WESTFALL, Richard. *Never at rest. A Biography of Isaac Newton.* Cambridge University Press, 1980.
WESTFALL, Richard. «The Problem of Force: Huygens, Newton, Leibniz», STLB, Sonderheft 13, 1984.

* * *

José L. Montesinos Sirera
Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia
fundacion@fundacionorotava.org