



Páginas: 293-304
Recibido: 2023-01-09
Revisado: 2023-02-15
Aceptado: 2023-05-18
Preprint: 2023-07-31
Publicación Final: 2023-09-01

www.revistascientificas.us.es/index.php/fuentes/index

DOI: <https://doi.org/10.12795/revistafuentes.2023.22921>

Pensamiento probabilístico en profesores en formación matemática: un acercamiento desde juegos aleatorios

Probabilistic thinking in mathematics training teachers: an approach from random games



Francisco Rodríguez Alveal

Universidad del Bío-Bío (Chile)



Timur Koparan

Universidad Zonguldak Bulent Ecevit (Turquía)

Resumen

El propósito del presente artículo es identificar y describir las habilidades asociadas al pensamiento probabilístico adquiridas por el profesorado en matemática en formación en las asignaturas de estadística cuando dan respuesta a juegos estocásticos. Para tal efecto se hizo uso de un enfoque cualitativo, en base a un análisis de contenido. Como técnica de captura de información se aplicó un instrumento de dos juegos no determinísticos adaptados al contexto chileno en las cuales los participantes debían dar respuesta a tres preguntas abiertas. Los 34 participantes fueron seleccionados mediante un muestreo no probabilístico del tipo intencionado. Entre los principales hallazgos se destacan que el profesorado en formación manifiesta escasa capacidad para conjeturar, como así también el tránsito entre la probabilidad intuitiva a la frecuencial, asimismo no representan gráficamente ni argumentan acerca del comportamiento de fenómenos aleatorios afín de lograr un aprendizaje colaborativo y de retroalimentación entre pares. En cambio, se evidencia el uso de tecnología en las simulaciones, acorde a lo explicitado en el currículo escolar. En conclusión, los profesores en formación de pedagogía en matemática presentan un escaso desarrollo en las habilidades asociadas al pensamiento probabilístico para describir y justificar el comportamiento de fenómenos estocásticos.

Abstract

The purpose of this article is to identify and describe the skills associated with probabilistic thinking acquired by mathematics teachers in training in statistics subjects when they respond to stochastic games. For this purpose, a qualitative approach was used, based on a content analysis. As an information capture technique, an instrument of two non-deterministic games adapted to the Chilean context was applied, in which the participants had to answer three open questions. The 34 participants were selected by means of a non-probabilistic sampling of the intentional type. Among the main findings, it stands out that the teachers in training show little capacity to conjecture, as well as the transit between the intuitive probability to the frequency, likewise they do not graphically represent or argue about the behavior of random phenomena in order to achieve collaborative learning and peer feedback. Instead, the use of technology in the simulations is evident, according to what is explicit in the school curriculum. In conclusion, teachers in mathematics pedagogy training have little development in the skills associated with probabilistic thinking to describe and justify the behavior of stochastic phenomena.

Palabras clave / Keywords

Statistics, Probability, Teaching, probabilistic thinking, random games, Active learning, ICT, Secondary education
Estadística, Probabilidad, Enseñanza, pensamiento probabilístico, juegos aleatorios, Aprendizaje activo, TIC, Enseñanza secundaria.

1. Introducción

Actualmente, los estudiantes que han ingresado o están integrándose a las carreras de pedagogía hacen uso de dispositivos tecnológicos entre 16 y 21 horas semanales (Sandoval et al., 2017). Demandando estrategias de enseñanza y de aprendizaje acordes a una sociedad tecnológica y dinámica (Chávez, 2020).

En coherencia con lo anterior, Chevallard (2017) ha declarado que el currículo en matemática requiere ser renovado donde la estadística ocupe un lugar fundamental. En esta línea, el informe *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE)* hace hincapié que los cursos de estadística y probabilidad deben fomentar un aprendizaje activo y desarrollar una comunicación eficaz de los conceptos por parte del estudiantado como así también hacer uso de herramientas tecnológicas (Carver et al., 2016; Garfield et al., 2005). Esto se encuentra en sintonía con lo mencionado por Padilla-Escorcía y Acevedo-Rincón (2021) quienes señalan que los “profesores de matemática deben conocer herramientas y recursos tecnológicos que permitan enseñar de manera efectiva el conocimiento” (p. 94).

Por otro lado, Aksoy et al. (2015) han hecho notar que una de las tareas cognitivas más importantes en las aulas del sistema escolar y universitarias es la resolución de problemas contextualizados que permitan colocar en práctica habilidades teóricas y prácticas. En este sentido, Anasagasti y Berciano (2016) indican que es necesario promover una “enseñanza de la estadística y probabilidad a través de estrategias activas de aprendizaje” (p. 33) haciendo uso de simulaciones, que favorezcan la reflexión, autonomía, trabajo colaborativo y la discusión entre el estudiantado.

En coherencia, surgen las interrogantes ¿Qué conceptos y argumentos estadísticos o probabilísticos emplean los profesores en formación matemática al dar respuesta a situaciones problemas afines a juegos no determinísticos?, ¿Qué herramientas TIC utilizan los profesores en formación para simular problemas afines a juegos no determinísticos? Para dar respuesta a estas preguntas, se definen los siguientes objetivos de investigación: 1) Identificar los conceptos estadísticos o probabilísticos que hacen mención de forma oral y escrita el profesorado en formación al dar respuesta a las actividades propuestas, 2) Describir las simulaciones realizadas por los profesores y profesoras en formación en el contexto de la situación planteada y 3) Develar los argumentos entregados por los participantes al resolver y justificar situaciones problemas afines a juegos no determinísticos.

1.1. Juegos no determinísticos como metodología de enseñanza

Las investigaciones sobre el aprendizaje basado en juegos han entregado antecedentes que esta metodología promueve entornos de aprendizaje activos y colaborativos (Blumberg et al., 2013). En particular, los juegos estocásticos favorecerían un cambio paradigmático en la entrega de contenidos probabilísticos que vayan más allá de la aritmetización (Estrella, 2017). De manera que el estudiantado conecte ideas y conceptos, en síntesis, adquirir un pensamiento probabilístico (Garfield y Ben-Zvi, 2008).

En esta misma línea, Carver et al. (2016) exhortan al profesorado implementar actividades de aprendizaje que permitan explorar el comportamiento de juegos aleatorios mediante el uso simulaciones. Este tipo de actividades es coherente, con el modelo propuesto por Lee y Hollebrands (2011) acerca del conocimiento pedagógico tecnológico del profesorado en el cual la tecnología favorece la adquisición de un pensamiento probabilístico. Dicho de otra forma, en la búsqueda de soluciones el estudiantado transita entre la predicción, observación y explicación fases que según Küçüközer (2013) permitirían aclarar sus ideas de manera de adquirir las habilidades y conocimientos relacionados con el pensamiento probabilístico. Dichas habilidades tienen una estrecha relación con la metodología de proyectos estadístico que “abren la puerta hacia un mundo donde se percibe la pertinencia de la estadística en la comprensión e interpretación de los fenómenos que ocurren allí” (León, 2020, p.246), promoviendo entornos de aprendizaje activo y colaborativo, que favorecen la interacción, reflexión, cuestionamiento y discusión entre el estudiantado (Azcárate y Cardeñoso, 2011; Takeuchi, 2016). En síntesis, implica “cambios en el modelo de enseñanza aprendizaje” (Luna, 2021, p.130) transitando desde la clase tradicional centrada en el docente hacia un modelo donde el estudiantado tenga una participación activa.

Al respecto, los juegos aleatorios son introducidos en el currículo escolar chileno mediante actividades relacionadas al uso de monedas, dados, ruletas y bolas (Huerta, 2020) en los cuales se encuentran presentes tareas como modelar y explicar. A través de ellas se logra “razonar partiendo de datos empíricos inciertos y formas de pensar en términos de la variabilidad de los fenómenos y de patrones que en ellos emergen” (León, 2020; p.661). Asimismo, entre los objetivos de aprendizaje se encuentra abordar el significado intuitivo,

clásico, frecuencial de la probabilidad (Batanero, 2005), como así también conjeturar acerca de la tendencia de resultados y modelar fenómenos o situaciones cotidianas no determinísticas.

1.2. El pensamiento probabilístico y las TIC

Como mencionan Perdomo y Rojas (2018) la introducción de las TIC es una de las grandes revoluciones en la enseñanza y la pedagogía. Debido que ayudan a pensar estadísticamente, como también fomentar el aprendizaje activo (Carver et al., 2016; Garfield et al., 2005). Es por ello que su inserción en el proceso de enseñanza y aprendizaje es clave para la exploración y adquisición de contenidos y conceptos propios de la estadística y probabilidad de manera de desarrollar las habilidades conjeturar, interpretar, simular, argumentar en el estudiantado (Koparan, 2019).

En este contexto, para Wild y Pfannkuch (1999) los procesos empíricos favorecen el pensamiento probabilístico debido que articulan ideas y conceptos. Lo que se pretende es minimizar el diseño manual de gráficos y resumen de información numérica (Biehler et al., 2013) para concentrarse en la comprensión conceptual, interpretación de los resultados, habilidades propias del pensamiento estadístico (Garfield y Ben-Zvi, 2008). En coherencia con lo anterior, en la Tabla 1 se muestran las fases asociadas al pensamiento estadístico, probabilístico y el uso de las TIC (Woodard, 2016) que serán consideradas en el presente estudio.

Tabla 1

Pensamiento estadístico, probabilístico y uso de TIC

	Fases	Definición de las fases
Pensamiento Estadístico y/o Probabilístico	Reconocimiento de la necesidad de los datos	<ul style="list-style-type: none"> - Da una declaración sobre los datos en la interpretación de los resultados. - Es capaz de identificar si se utilizan técnicas adecuadas de recopilación de datos.
	Transnumeración	<ul style="list-style-type: none"> - Es capaz de pensar en las variables del estudio y siente curiosidad por las formas de representarlas. - Usa herramientas de análisis de datos exploratorios para la exploración, y no solo métodos prescritos. - Utiliza múltiples representaciones para interpretar y dar sentido a los datos.
	Integración estadística y contexto	<ul style="list-style-type: none"> - Es capaz de planificar la recopilación y el análisis de datos en función del conocimiento contextual de los datos. - Es capaz de sacar conclusiones más razonables utilizando el contexto de los datos.
Tics y Estadística	Reconoce los patrones para la toma de decisiones	<ul style="list-style-type: none"> - Reconoce patrones, ya sea en la forma en que se codifican las cosas o en el comportamiento de los resultados. - Utiliza la salida de la tecnología para ayudar a decidir a dónde ir a continuación en el análisis.
	Automatizar computacionalmente los procedimientos	<ul style="list-style-type: none"> - Crea múltiples gráficos o resúmenes para dar sentido a los datos. - Utiliza la tecnología para realizar el análisis y luego hace las inferencias adecuadas.

Fuente: Woodard (2016)

Al respecto, el currículo de enseñanza secundaria en Chile hace mención al uso de Excel, no obstante Sandoval et al. (2017) entregan evidencias que el 59% del profesorado en formación encuestados en dicha oportunidad no lo dominan. Este hallazgo resulta de interés como antecedente en el presente estudio dado que se trata de poblaciones similares. Pero sobre todo generaría tensiones en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística a nivel universitario y por consiguiente en el sistema escolar chileno.

2. Metodología

La investigación se enmarca en un diseño cualitativo y descriptivo anidado (Cook y Reichardt, 2000). Las respuestas entregadas por el profesorado en formación fueron analizadas mediante la técnica de análisis de contenido (Krippendorff, 1997).

2.1. Contexto y participantes

El estudio contó con la participación de 34 profesores y profesoras en formación de pedagogía en matemática que cursaban la asignatura de Didáctica de la Estadística en el segundo semestre de 2021 en una universidad

perteneciente al Consejo de Rectores de Universidades chilenas. Fueron seleccionados mediante un muestreo no probabilístico del tipo intencionado (McMillan y Schumacher, 2011) quienes trabajaron colaborativamente de manera online atendiendo a una educación a distancia producto del COVID-19. Para efectos del estudio los participantes se agruparon libremente, generándose 11 grupos de trabajo de entre 1 y 4 integrantes cada uno. Cabe mencionar que los participantes firmaron un consentimiento informado en el cual se detallaba los alcances del estudio y el anonimato de ellos.

2.2. Instrumento de recolección de datos y procedimiento de análisis

Para efectos del estudio se aplicó un instrumento relacionado con dos juegos estocásticos con tres ítems abiertos cada uno, adaptados del artículo de Koparan (2019) al contexto chileno. Los que se orientaban a conjeturar, simular, observar y explicar el comportamiento empírico y teórico, como se muestra en la Figura 1.

Situación 1: Piedra, papel y tijeras. Juego que consiste en la que ambos jugadores usan señas con las manos indicando Puño: Piedra, Palma: papel, Dedos índice y medio: tijeras. Mientras se participa, las manos se mueven simbolizando piedra, papel, tijeras. Donde la piedra rompe las tijeras. Papel envuelve piedra y la Tijeras corta papel. Teniendo presente el enunciado responder las siguientes preguntas:

- ¿Es justo el juego?. Entregue argumentaciones al respecto.
- Simular el experimento y comentar que observa. Compare y comente acerca de los resultados empíricos entregados en la simulación realizada y las probabilidades teóricas calculadas.

Situación 2: Juego de Dados. Dos amigos deciden jugar un juego de lanzamiento de dados. Tiran dos dados y calculan la diferencia entre el número mayor y el número menor, de los dados. Si la diferencia es 0, 1 ó 2, gana el primer jugador; en caso contrario, gana el segundo jugador.

- ¿Cree que el juego es equitativo? Explica tu decisión
- Parte de la idea que juegas el juego con un amigo 50 veces (simula el juego con algún software). ¿Tu opinión sobre la equidad del juego, cambió después de haberlo jugado? Explica tu respuesta con detalle.
- ¿Cuál es la probabilidad teórica de ganar de los jugadores? ¿Difiere de los resultados empíricos encontrados anteriormente? Desarrolla tu respuesta.

Figura 1. Juegos no determinísticos planteados a los participantes. Adaptados Koparan (2019).

Los grupos entregaron sus respuestas a las situaciones mediante dos productos, una explicación en audio y un informe escrito. El tratamiento de la información fue realizado mediante un análisis de contenido siguiendo los pasos propuestos por Mayring (2000). Específicamente se indagó acerca de cómo piensan, argumentan e interactúan verbalmente los integrantes de cada grupo de manera de dar respuesta a las interrogantes planteadas. Teniendo presente las fases mencionadas en la Tabla 1.

3. Resultados

Acorde a lo mencionado anteriormente, los resultados se dividen en dos secciones. En la primera de ellas se presenta el análisis de la interacción verbal de los participantes que permite evidenciar la forma en la que ellos piensan, razonan y discuten para dar respuesta a las interrogantes planteadas. En la segunda sección se analiza el informe escrito que permite ver la materialización de las ideas planteadas verbalmente por los participantes.

3.1. Análisis de la argumentación oral que realizan los profesores en formación

En la primera situación los profesores en formación interactúan oralmente entre 1.5 a 10.8 minutos, iniciando con la lectura. En base a la cual, conjeturan acerca si el juego es justo como se aprecia en las siguientes citas.

*El juego, es justo con las reglas establecidas de piedra, papel y tijera. Predicen desde la
y las opciones de los participantes es claramente aleatoria (Grupo_2) aleatoriedad*

Yo creo que si por qué ambos jugadores tienen las mismas posibilidades (Grupo_4) **Predicen desde una mirada intuitiva**

Tal como se observa los participantes hacen mención al concepto aleatoriedad sin entregar argumentaciones que permitan justificar que el juego no es determinístico, como así también desde conceptos como posibilidad asociados a la probabilidad intuitiva (Batanero, 2005). Por otra parte, acorde a lo solicitado en la pregunta b) los grupos comentan que:

Al jugarlo uno se puede dar cuenta que si es equitativo ya que los participantes tienen las mismas posibilidades de ganar (Grupo_3) **Integración estadística y contexto**
Se podría darle numeritos para simular el juego (Grupo_2)

Transnumeración

Se desprende que los participantes explicitan que para tomar una decisión sobre la equidad del juego hay de jugarlo, haciendo referencia al concepto de equiprobabilidad el cual se encuentra relacionado con la probabilidad clásica (Batanero, 2005). Esto lo realizan sin entregar argumentaciones teóricas al respecto. Asimismo, exponen que hay que asignar valores numéricos a Piedra, Papel y Tijera lo que evidencia el proceso de transnumeración siendo una aproximación al pensamiento probabilístico (Garfield y Ben-Zvi, 2008). Además, declaran hacer uso de la función aleatorio.entre de Excel para simular el juego, relacionando las TIC con la Estadística, como se muestra en la siguiente cita.

Simular el juego con Excel con aleatorio.entre (Grupo_1). **Tics y Estadística**

Los diálogos entre los participantes dan cuenta del uso de tablas estadísticas para resumir los datos (transnumeración) y una aproximación a la automatización computacional (TIC y Estadística). Cabe hacer notar que en los relatos verbales, no realizan contra argumentaciones teóricas plausibles y solamente hacen referencia a actividades procedimentales.

Por otro lado, en la actividad 2, los grupos interactúan verbalmente entre 3.5 y 12.0 minutos, iniciando con la lectura y manifestando hacer uso de simulaciones y tablas de distribución para resumir el lanzamiento de los dos dados. Dicha acción estaría reflejando un cambio de representación (transnumeración) y la integración estadística y contexto, categorías relacionadas al pensamiento estadístico (Tabla 2). Un ejemplo de ello es el siguiente comentario.

Se suponen que tiran dos dados, [la segunda integrante]: colocar todas las posibilidades, la [tercer integrante] que haría una tabla donde el primer número sea 1 menos 1, 1 menos 2 hasta el 6. Después lo mismo con el 2, con el tres y cuatro. (Grupo_1) **Reconocimiento de la necesidad de los datos**
Transnumeración

Para algunos grupos la equidad del juego se infieren desde la lectura del texto, en cambio, para otros el juego no es justo, como se muestra en las siguientes citas.

Solo leyendo el problema se podría decir que el juego es equitativo. (Grupo_1) **Lectura inferencial**
La probabilidad de que la diferencia sea 0, 1 o 2 son tres y de que sea 3, 4 y 5 también son tres. En ese sentido sería equitativo (Grupo_4) **Reconocimiento de la necesidad de los datos**

En síntesis, transitan desde una lectura literal a una inferencial, sin entregar antecedentes teóricos, haciendo uso básicamente de la intuición. En cambio, otros grupos, fundamentan sus decisiones, a partir de las respuestas diferentes entre los dados (Grupo_4), argumento que lleva a tomar una decisión incorrecta. Por otro lado, los participantes hacen mención de manera implícita a la observación y a conceptos como probabilidad, búsqueda de patrones y transnumeración. A manera de ejemplo mencionan.

Hay más probabilidad de que salga el número 1 y el 2 que los otros , que las diferencias al lanzar dos dados se repiten más (Grupo_1) **Reconocimiento de la necesidad de los datos**

Es decir, sus intuiciones se basan en la probabilidad clásica y transnumeración que se relaciona con el pensamiento estadístico y búsqueda de patrones (TIC y Estadística). Por otro lado, realizan conclusiones desde la integración estadística y contexto (Pensamiento Estadístico).

El jugador 1 tienen más combinaciones a su favor, una de las integrantes comenta que no se pueden hablar de que salgan sus combinaciones pues tiene 0, 1 y 2 . (Grupo_4) **Reconocimiento de patrones**

Los participantes del Grupo 4 develan problemas conceptuales acerca de las combinaciones. Además, no contraargumentan entre ellos de manera de institucionalizar conceptos y puntualizar otros de manera de fomentar el pensamiento probabilístico.

3.2. Análisis de las respuestas entregadas por escrito de las actividades planteadas

En la actividad 1, los profesores en formación deben analizar si el juego es justo o no, desde una mirada intuitiva. El 90% de los grupos conjeturó que el juego era justo, entregando argumentaciones escritas como:

Consideramos que es justo el juego ya que ambos jugadores tienen las mismas posibilidades de ganar y perder. (Grupo_10) **Predicen desde la equiprobabilidad**
El juego es justo, porque cada jugador puede perder, ganar o de empatar. (Grupo_7) **Predicen desde la probabilidad clásica**

Se evidencia un dogmatismo teórico (Sánchez et al., 2018) debido que sus respuestas se enfocan implícitamente en el cálculo clásico de probabilidad (Batanero, 2005) es decir, aceptan de forma natural la hipótesis de la equiprobabilidad (Spiegelhalter y Gage, 2014; Huerta, 2020). Por otro lado, el Grupo 1 de profesores en formación, conjeturan desde su experiencia acerca del uso de patrones para jugar.

No, porque el juego sigue siendo justo, ya que no se sabe lo que el otro jugador va a realizar [piedra papel o tijera]. Pero de igual manera algunas veces la gente sigue patrones que uno puede predecir para ganar. (Grupo_1) **Predicen- Reconocimiento de la necesidad de los datos**

En síntesis, los futuros profesores basan sus predicciones desde la probabilidad clásica, sin ahondar en cuestiones teóricas. Lo que puede ser explicado, como menciona Huerta (2020) en el exceso de problemas rutinarios afines al lanzamiento de “monedas, dados, ruletas o bolas” (p.83) que han debido dar respuesta durante su formación, en los cuales asumen la equiprobabilidad. Además, no hacen alusión a asignaciones cualitativas relacionadas con probabilidad intuitiva, lo cual no evidenciaría un pensamiento probabilístico en el profesorado en formación.

En la segunda interpelación los participantes debían simular y describir lo observado. Al respecto, el profesorado en formación presenta simulaciones realizadas en Excel Apps de Internet como se muestra en la Figura 2. Se destaca que solamente un grupo (figura del centro), generó una interfaz dinámica para recrear la actividad planteada mediante las funciones de Excel.

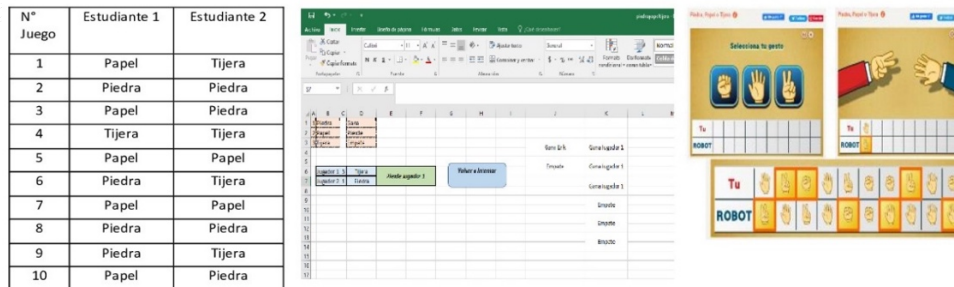


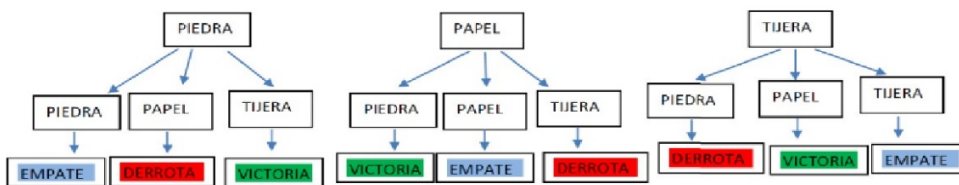
Figura 2. Simulación del juego Piedra, papel y tijera por grupo de profesores en formación.

Se observa el uso de tablas que permiten visualizar patrones, a fin de dar sentido a los argumentos entregados por el profesorado en formación. En síntesis, realizan una transnumeración proceso asociado al pensamiento estadístico (Tabla 2) y al mismo tiempo hacen uso de TIC. A continuación, se presentan algunos extractos de los comentarios realizados después de simular el juego:

Nuestra opinión no cambia después de haberlo jugado, al elegir una opción de manera espontánea no se obtiene un jugador ganador previo a la elección. (Grupo_11)
El juego es equitativo, debido a que los participantes tienen un 1/3 de posibilidades para ganar. (Grupo_4)
Se puede observar que el juego es totalmente aleatorio y equitativo, ya que los jugadores tienen la posibilidad de perder o ganar. (Grupo_1)

Reconocimiento de la necesidad de los datos Equiprobabilidad
Reconocimiento de la necesidad de los datos

Estas evidencias se sustentan en el cálculo de probabilidad clásica, aleatoriedad y equiprobabilidad, acorde a una enseñanza aritmetizada de la probabilidad (Estrella, 2017). En síntesis, no hacen uso de la integración de las TIC y la estadística para analizar y describir el comportamiento del juego (Carver et al., 2016; Woodard, 2016). Por otro lado, de los once grupos, solamente dos simulaban el juego mediante un diagrama de árbol, como se muestra en la siguiente Figura 3.



Fuente: Grupo_2

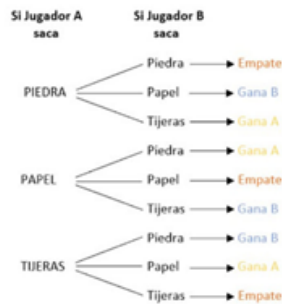
Figura 3. Simulación del juego Piedra, papel y tijera mediante un diagrama de árbol

Comentando que.

La probabilidad teórica de ganar para ambos jugadores es de 1/3. Lo cual en este caso es igual a los datos empíricos obtenidos de la simulación. Si se aumenta la cantidad de veces que se repita el experimento, las probabilidades serán iguales o estarán cerca de las probabilidades teóricas. (Grupo_2)

Razonamiento con modelos estadísticos

Los participantes calculan la probabilidad de ganar mediante la regla de Laplace, sin referirse a supuestos teóricos como el sesgo de la equiprobabilidad (Huerta, 2020), habilidades y conocimientos propios del pensamiento estadístico (Garfield y Ben-Zvi, 2008). De manera similar los integrantes del Grupo 10, entregan el siguiente diagrama de árbol.



Fuente: Grupo_10

Figura 4. Simulación del juego Piedra, papel y tijera mediante un diagrama de árbol

En esta figura definen los eventos “Empate”, “Gana jugador A”, “Gana Jugador B”, calcular las probabilidades asociadas a estos eventos, comentando que:

Podemos observar las posibilidades que pueden ocurrir según la seña que haga cada jugador, en este caso se puede observar las combinaciones que pueden hacer y el resultado de estas. (Grupo_10) **Transnumeración**

Al respecto, llama la atención que ninguno de los dos grupos escribe por extensión el espacio muestral de manera de calcular las probabilidades teóricas de los eventos obtener Piedra (2/9), Papel (2/9) y Tijera (2/9) y Empatar de ambos jugadores (3/9), atendiendo a las reglas del juego. No obstante, los integrantes del Grupo2 deslizan de manera implícita el significado frecuencial de la probabilidad y su relación con la Ley de los Grandes Números (Batanero, 2005). En contraste, los futuros profesores del estudio de Koparan (2019) describen por extensión el espacio muestral y en base al enunciado del problema calculan correctamente las probabilidades teóricas. Por su parte, los integrantes del Grupo 1, hacen alusión de manera explícita al concepto de probabilidad teórica y de forma implícita a la probabilidad frecuencial, como se evidencia en la siguiente cita.

La probabilidad teórica de ganar es de 1/3. Los resultados van a depender de la cantidad de veces que realices el juego. En la simulación se tiene que el jugador 1 ganó 3/10, el jugador 2 ganó 4/10 y hubo 3 empates. (Grupo_1) **Razonamiento con modelos estadísticos**

De manera similar los integrantes del Grupo 6, comentan que:

Al realizar dos simulaciones de 10 duelos, se observa que no hay una tendencia a que gane un jugador específico, más bien se observa una diferencia poco significativa en los resultados. Donde el jugador 1 obtuvo en ambas simulaciones 3/10 y 4/10 duelos ganados respectivamente. (Grupo_6) **Razonamiento con modelos estadísticos**

Los miembros de los Grupos 1 y 6 calculan erróneamente las probabilidades solicitadas evidenciando una falta de comprensión del problema. Por otro lado, en la **actividad 2** se propone un juego con dados lo que Huerta (2020) ha denominado problemas rutinarios. En relación con la pregunta ¿crees que el juego es equitativo? siete de los once grupos (63.6%) manifiestan que el juego no es equitativo. Algunos de los argumentos entregados son:

Se ve reflejado que las diferencias al lanzar dos dados se repiten más el 0,1 y 2 que 3,4 y 5, por lo tanto, el juego no es equitativo. (Grupo_1)
No es equitativo el juego, dado que el jugador 1 tiene más posibilidades de obtener las diferencias que se le piden para el triunfo. (Grupo_3)
Realizamos las diferencias para cada número de los dados, lo que nos da que las posibilidades que salga 0, 1 y 2 son 15 veces, mientras que 3, 4 y 5 solamente 6 veces, por lo que el juego no es para nada equitativo. (Grupo_9) **Reconocimiento de Patrones Reconocimiento de la necesidad de los datos Reconocimiento de patrones**

Estos relatos son coherentes con lo mencionado por Dayal y Sharma (2020). Asimismo, se observa que las predicciones realizadas se fundamentan esencialmente en cuestiones algorítmicas como el reconocimiento de patrones y no desde una mirada intuitiva. Es decir, el estudiantado no formula conjeturas acerca del comportamiento del juego en base a conceptos cualitativos (Batanero, 2005). Solamente, después de observar el comportamiento del juego mediante Excel o Apps de Internet. En general, los profesores en formación exponen que el juego no es equitativo, entregando argumentaciones como:

Antes de realizar el experimento no se tenía en conocimiento que la probabilidad de cada resta no es equitativa, y que, por ejemplo, la diferencia más probable es 1 y la menos probable es 5. Esto se da porque es más probable obtener números, con un rango menor entre ellos. (Grupo_5)
Antes no teníamos la seguridad de que el juego era equitativo, pero ahora en base a las tablas realizadas nos dimos cuenta que los jugadores no tenían las mismas posibilidades de ganar. Y que el jugador que obtiene 0,1 y 2 tiene más posibilidad que el otro. (Grupo_1)

Reconocimiento de la necesidad de los datos

Transnumeración

En estos casos se evidencia el uso de tablas de contingencia para visualizar el comportamiento de las diferencias de los dados acorde a las reglas del juego, en síntesis, hacen uso del proceso transnumeración (Wild y Pfannkuch, 1999), dando cuenta de un acercamiento al pensamiento estadístico (Garfield y Ben-Zvi, 2008). Por otro lado, dos grupos comentan.

La probabilidad teórica es que tenemos un total de 21 combinaciones posibles que se pueden formar con el dado, de las cuales 15 sale ganador el jugador 1 que tiene una diferencia menor igual a 2 y en 6 sale el jugador 2 que tiene una diferencia mayor a 2, probabilidad que gane el jugador 1 es $15/21 = 0,71$ y la probabilidad de que gane el jugador 2 es $6/21 = 0,28$. No difiere mucho ya que las probabilidades son muy similares tanto en lo teórico como en lo empírico $35/50 = 0,7$ y $15/50 = 0,30$. (Grupo_3, Grupo_7)

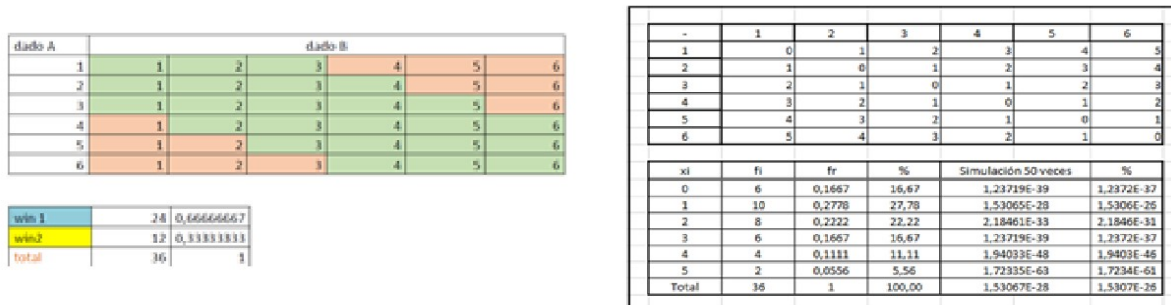
Razonamiento con modelos teóricos

En este relato hacen alusión al cálculo de probabilidad, sin considerar las permutaciones de los dados de manera de conocer la cardinalidad del espacio muestral, en cambio otro grupo argumenta que la:

Probabilidad teórica $3/6 = 50\%$ en ambos casos. Teóricamente tienen la misma probabilidad de ganar. (Grupo_10)

Razonamiento con modelos teóricos

Tal como se observa determinan heurísticamente la probabilidad mediante la Regla de Laplace cuyo resultado es 0,5 infiriendo que el juego es equitativo. Sin embargo, como mencionan Dayal y Sharma (2020) este es “un juicio erróneo de que el juego es justo” (p. 98). Por otro lado, dos de los once grupos (18.2%) entregan el resultado correcto, teniendo como base el resumen presentado en una tabla de doble entrada (Grupo_2) y después de haber simulado 50 veces el experimento (Grupo_5) como se muestra en la siguiente figura.



Fuente: Grupo_2 y Grupo_5, respectivamente
Figura 5. Tablas de doble entrada que muestran las diferencias al lanzar los dados

Al respecto los participantes de dichos grupos reseñan que:

La probabilidad teórica que tienen los jugadores uno y dos de ganar son 66,7% y 33,3% respectivamente. En cambio, los resultados empíricos son 74% y 26% respectivamente, lo que muestra claramente la ventaja que tenía un jugador por sobre el otro (Grupo_2).

Razonamiento con modelos teóricos

Se puede concluir, con los nuevos datos, que el juego no es equitativo, pues los elementos del conjunto $\{0,1,2\}$ tiene más probabilidad de ocurrencia, específicamente un 66,6%. Aunque se repita 50 veces el experimento, las probabilidades disminuyen, pero siendo favorables para el conjunto mencionado, estamos hablando de un $1,53E-26\%$ sobre un $1,237E-37\%$ del conjunto $\{3,4,5\}$ (Grupo_5).

Razonamiento con modelos teóricos

En estos relatos escritos no se hace mención a cuestiones teóricas como la convergencia de los resultados empíricos a los teóricos acorde a Ley de los Grandes Números. Aun cuando los integrantes del Grupo_5, manifiestan el efecto de aumentar el número de simulaciones, sin entregar mayores argumentaciones. Es decir, no reconocen patrones para la toma de decisiones y realizar inferencias acerca del comportamiento del juego, en base a un gráfico de barras simple como lo realizan los participantes en el estudio de Dayal y Sharma (2020). Asimismo, ningún grupo hizo uso del diagrama de árbol para exhibir el número total de combinaciones del lanzamiento de los dos dados acorde a las reglas del juego, lo cual es coherente a lo encontrado por Dayal y Sharma (2020).

4. Discusión y Conclusiones

Los cambios en el aula escolar deben ocurrir primero en la formación inicial del profesorado. En este contexto, el presente estudio analizó la interacción y los argumentos que realizan los profesores y profesoras en formación al dar respuesta a las interrogantes planteadas acerca de dos juegos aleatorios.

Al respecto, los audios entregados por los grupos permitieron evidenciar una escasa interacción entre los sus integrantes, que eventualmente incidiría en desarrollar un diálogo tendiente a favorecer una argumentación y generación de un aprendizaje colaborativo entre pares de manera de potenciar un pensamiento probabilístico. No obstante, los relatos entregados por los participantes proporcionan un acercamiento a la forma de pensar de ellos al enfrentarse a una situación problema que eventualmente es procedimental. Es decir, hacen hincapié al uso de la tecnología con la Estadística. Como así también comentan la forma de representar los datos (cambios de representaciones) acción asociada al pensamiento probabilístico. Llama la atención que no dialoguen sobre las fundamentaciones teóricas al comparar los resultados empíricos con los hipotéticos.

Por otro lado, el análisis de contenido de las respuestas entregadas por escrito da cuenta que las conjeturas que efectúan los participantes acerca de la equidad del juego se basan esencialmente en las simulaciones al cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y del concepto equiprobabilidad sin ahondar en la epistemología del concepto en concordancia a lo mencionado por Huerta (2020). Como así también de las nociones previas que tienen acerca de los juegos analizados, en particular el relacionado con Piedra, Papel y Tijera. Una explicación probable al respecto, podría ser que durante su formación no ahondaron en situaciones problemas donde interviniera el concepto de probabilidad intuitiva, como la formulación de conjeturas acerca del comportamiento no determinístico.

En relación con las fases de observar y predecir los participantes las entremezclan con la de explicar, etapa donde el profesorado en formación no proporciona fundamentaciones teóricas al comparar, analizar, inferir y explicar los resultados empíricos en particular no hacen referencia a la Ley de los Grandes Números, aun cuando se encuentra presente en el currículo escolar chileno.

En general, las opiniones, comentarios y propuestas de análisis mencionadas por los miembros de los grupos en los videos se desarrollan en extenso en las respuestas entregadas por escrito, lo cual deja entre ver un escaso aprendizaje colaborativo oral entre los participantes. Asimismo, el análisis y observaciones realizadas de las simulaciones no fueron contrastadas con la literatura especializada, como por ejemplo la Ley de los Grandes Números la cual deben enseñar en el sistema escolar chileno para explicar e inferir acerca del comportamiento de fenómenos aleatorios.

Por otro lado, los profesores en formación demuestran escasas habilidades para simular en Excel procesos estocásticos en particular los juegos analizados, situación que es coherente a lo mencionado por (Sandoval

et al., 2017). En este contexto es necesario ahondar durante la formación en softwares dinámicos como GeoGebra y en especial TinkerPlots como lo hace saber (Koparan, 2019), el que posee una interface gráfica y algebraica, que permite tomar decisiones, contrastar los resultados empíricos con la teoría, actividades que se pueden llevar al aula de clases. En adición el profesorado en formación que participó del estudio declara tener inseguridad en relación a los contenidos adquiridos acerca de probabilidad, situación que eventualmente les podría llevar a no enseñar este contenido en el sistema escolar. Lo cual es coherente a lo mencionado por Batanero et al. (2016) acerca que la formación que reciben los futuros profesores no adecuada para desenvolverse en el sistema escolar.

Cabe hacer notar que entre las limitaciones del presente estudio se encuentra el número de participantes y el tipo de muestreo que no permite generalizar los hallazgos. Asimismo, para futuros estudios se sugiere entrevistar a los profesores en formación a fin de explorar su pensamiento probabilístico con respecto a las interrogantes que debían dar respuesta. No obstante, entrega antecedentes acerca de actividades que deberían ser consideradas en los programas de asignatura de estadística y probabilidad de manera que los futuros profesores del sistema escolar adquieran un pensamiento probabilístico y alejarse de una estadística aritmetizada como menciona Estrella (2017), atendiendo que este tipo de actividades se encuentra presente en el currículo escolar chileno. En resumen, los investigadores dejan planteadas inquietudes acerca de ahondar en los juegos no determinísticos tradicionales, tanto en profesores en formación como en activo para que integren no solo el contenido estadístico sino también habilidades propias del pensamiento estadístico.

Agradecimientos

Este trabajo se enmarca en el proyecto de investigación “Incidencia de la formación estadística en la alfabetización y el pensamiento estadístico de los futuros profesores de pedagogía en matemática” (FONDECYT INICIACIÓN N°11220295) financiado por la Agencia Nacional de Investigación (ANID) de Chile

Referencias

- Aksoy, Y., Bayazit, İ., & Kımıp, S.M. (2015). Prospective Primary School Teachers' Proficiencies in Solving Real-World Problems: Approaches, Strategies and Models. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 11(4), 827-839. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1442a>
- Anasagasti, J., & Berciano, A. (2016). El aprendizaje de la estadística a través de PBL con futuros profesores de Primaria. *Contextos Educativos. Revista de Educación, Extra 1*, 31-43. <https://doi.org/10.18172/con.2699>
- Azcárate, P., & Cardeñoso, J.M. (2011). La enseñanza de la Estadística a través de escenarios: implicaciones en el desarrollo profesional. *Bolema. Boletim de Educação Matemática*, 24(40), 789-810.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(3), 247-264.
- Batanero, C., Chernoff, E.J., Engel, J., Lee, H.S., & Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-31625-3>
- Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A., & Makar, K. (2012). Technology for enhancing statistical reasoning at the school level. En M.A. Clement, A.J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick & F.K.S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 643-689). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_21
- Blumberg, F., Almonte, D., Anthony, J., & Hashimoto, N. (2013). Serious games: ¿What are they? What do they do? Why should we play them? En K. Dill (Ed.), *The Oxford Handbook of Media Psychology* (pp. 334-351). Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780195398809.013.0019>
- Carver, R., Everson, M., Gabrosek, J., Horton, N., Lock, R., Mocko, M., Rossman, A., Roswell, G. H., Velleman, P., Witmer, J., & Wood, B. (2016). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) college report 2016*. AMSTAT. <https://commons.erau.edu/publication/1083>
- Chávez, N. (2020). Internet, tecnología... *Los millennials están transformando la educación*. Siembargo. Recuperado de <https://www.sinembargo.mx/02-02-2020/3722783>.
- Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *La Gaceta de la RSME*, 20(1), 159-169.
- Cook, T., & Reichardt, C. (2000). *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación en educación evaluativa*. Morata.
- Dayal, H., & Sharma, S. (2020). Investigating Probability Concepts of Secondary Pre-service Teachers in a Game Context. *Australian Journal of Teacher Education*, 45(5), 91-109. <https://doi.org/10.14221/ajte.2020v45n5.6>
- Estrella, S. (2017). Enseñar Estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. En A. Salcedo (Ed.), *Alternativas pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI* (pp. 173-194). Caracas: Universidad Central de Venezuela.

- Garfield, J., Aliaga, M., Cobb, G., Cuff, C., Gould, R., & Lock, R. (2005). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) College Report*. American Statistical Association.
- Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Springer.
- Huerta, P. (2020). Hipótesis y conjeturas en el desarrollo del pensamiento estocástico: retos para su enseñanza y en la formación de profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 23(1), 79-102. <https://doi.org/10.12802/relime.20.2313>
- Koparan, T. (2019). Teaching Game and Simulation Based Probability. *International Journal of Assessment Tools in Education*, 6(2), 235-258
- Krippendorff, K. (1997). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Paidós.
- Küçüközer, H. (2013). Designing a powerful learning environment to promote durable conceptual change. *Computers & Education*, 68, 482-491. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2013.06.012>
- Lee, H.S., & Hollebrands, K. (2011). Characterizing and developing teachers' knowledge for teaching statistics with technology. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study* (pp. 359-369). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_34
- León, N. (2020). Alcances de la Enseñanza de la Estadística a través de la investigación en la Educación Media de Venezuela. *Revista Paradigma*, 40, 657-684. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p657-684.id808>
- León, N. (2021). Enseñanza de la Estadística con sentido y en contexto a través de la resolución de problemas. *Realidad y Reflexión*, 53, 228-253. <https://doi.org/10.5377/ryr.v53i53.10897>
- Luna, J.C. (2021). El aprendizaje colaborativo en la enseñanza de la Matemática a nivel de pregrado. *Delectus*, 4(1), 129-138. <https://doi.org/10.36996/delectus.v4i1.71>
- Mayring, P. (2000). Qualitative content analysis. *Forum Qualitative Sozialforschung / Forum: Qualitative Social Research*, 1(2), 20. <https://doi.org/10.17169/fqs-1.2.1089>
- McMillan, J., & Schumacher, S. (2011). *Investigación educativa*. Pearson-Adisson Wesley.
- Padilla-Escorcia, I.A., & Acevedo-Rincón, J.P. (2021). Conocimiento especializado del profesor que enseña la reflexión de la función trigonométrica seno: mediaciones con TIC. *Eco Matemático*, 12(1), 93-106. <https://doi.org/10.22463/17948231.3072>
- Perdomo, I., & Rojas, J. (2018). La redificación como herramienta pedagógica: algunas reflexiones desde la psicología. *Revista de Estudios y Experiencias en Educación*, 18(36), 161-175. <https://doi.org/10.21703/rexe.20191836perdomo9>
- Sánchez, E., García-García, J., & Mercado, M. (2018). Determinism and empirical commitment in the probabilistic reasoning of high school students. En C. Batanero & E. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics. ICME-13 Monographs* (pp. 223-239). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_13
- Sandoval, P., Rodríguez, F., Maldonado, F. (2017). Evaluación de la alfabetización digital y pedagógica en TIC, a partir de las opiniones de estudiantes en Formación Inicial Docente. *Educacao E Pesquisa*, 43(1), 127-143. <https://doi.org/10.1590/S1517-9702201701154907>
- Spiegelhalter, D., & Gage, J. (2014). What can education learn from real-world communication of risk and uncertainty? *The Mathematics Enthusiast*, 12(1), 4-10. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1329>
- Takeuchi, M. (2016). Friendships and group work in linguistically diverse mathematics classrooms: Opportunities to learn for English language learners. *Journal of the Learning Sciences*, 25(3), 411-437. <https://doi.org/10.1080/10508406.2016.1169422>
- Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x>
- Woodard, R.D. (2016, Julio 30 - Agosto 4). *Emphasizing critical thinking in introductory statistics* [Comunicación]. Joint Statistical Meetings, Chicago, Illinois, Estados Unidos.