En este artículo se hace referencia a la contribución que desde la propia Física se ha hecho a la crisis epistemológica del Mecanicismo Newtoniano y, consecuentemente, al desarrollo del Paradigma de la Complejidad. Se pone el acento en la Teoría (Matemática) de los Sistemas Dinámicos y en el estudio de los fenómenos no-lineales. Como aplicación de todo ello se proponen cambios sustantivos en la educación y en la enseñanza de las ciencias acordes con la concepción actual de la Física y el desarrollo de las Matemáticas y la Informática.

Complejidad, No-linealidad y Didáctica de las Ciencias*

pp. 53-69

A. R. García Torres**
A. M. López Jiménez***

La ciencia y la Filosofía de la ciencia de la modernidad

La Ciencia Mecanicista Newtoniana, conjuntamente con los conceptos de progreso, razón y otros, ha sido desde sus orígenes uno de los pilares fundamentales de la Modernidad Ilustrada (Moreno, 2002).

Los supuestos de la Ciencia Mecanicista

El paradigma del Mecanicismo Newtoniano fue construido sobre los supuestos de inteligibilidad y objetivación y ha dominado la sociedad occidental hasta nuestros días (Schrödinger, 1975).

El supuesto de inteligibilidad considera que el acontecer natural puede llegar a comprenderse e implica la existencia de un orden en el Universo que se manifiesta en forma de leyes naturales.

El Orden de la Naturaleza se concibe de forma semejante al funcionamiento de las máquinas y se construye de acuerdo a un plan externo. Este concepto paradigmático del Dios Relojero de la Ciencia Moderna se mantiene hasta bien entrado el siglo XX.

Por otro lado, el supuesto de objetivación afirma que el conocimiento es objetivo y totalmente independiente del sujeto cognoscente, de sus pretensiones, creencias y valores. En coherencia con el supuesto de inteligibilidad el hombre que describe la Naturaleza no puede pertenecer a ella, sino que la domina desde el exterior; la visión teológica del Universo justifica que el hombre sea capaz de descifrar las leyes físicas que lo gobiernan acercándose poco a poco al conocimiento que Dios posee de forma absoluta (Lamo de Espinosa et al, 1994). Descartes estableció una separación radical entre el Yo Pensante y la Cosa Material, es decir entre filosofía y ciencia. Esto ha con-

* Con nuestro agradecimiento a D. Antonio Córdoba Zurita de la Faculltad de Física de la Universidad de Sevilla, por su amabilidad al revisar este artículo.
** I.E.S. Los Viveros (Sevilla). Correo electrónico: argarciatorres@telefonica.net
*** Departamento de Psicología Experimental, Universidad de Sevilla. Correo electrónico: analopez@us.es

http://dx.doi.org/10.12795/IE.2004.i53.04

ducido a la ciencia a prescindir de una capacidad de autorreflexión y a eliminar al sujeto de la observación, en la suposición de que los objetos existen independientemente del sujeto que observa. Al separarse artificialmente el observador del objeto observado se originaron unas Humanidades y unas Ciencias de la Naturaleza totalmente incomunicadas (Morin, 1995).

La Física Newtoniana y el Principio de Determinismo

Como sabemos, las Leyes de la Dinámica de Newton están formuladas como un conjunto de ecuaciones diferenciales, llamado sistema dinámico, que estudian la evolución temporal de las variables posición y velocidad de un sistema de cuerpos, considerados como puntos materiales, sobre los que actúan un conjunto de fuerzas. Si se conocen las posiciones y velocidades de las partículas en un instante cualquiera, denominadas condiciones iniciales, entonces aquellas quedan también perfectamente determinadas en cualquier otro instante, anterior o posterior, y consecuentemente las trayectorias del conjunto de partículas. Los sistemas dinámicos newtonianos permiten, pues, tanto predecir el futuro como retrodecir el pasado (Principio de Determinismo).

Las ecuaciones del movimiento implican una simetría temporal de tal manera que si las velocidades de todos los puntos del sistema dinámico son instantánea y simultáneamente invertidas, todo ocurre como si el sistema recorriera el tiempo en sentido inverso (Reversibilidad temporal). Esta visión newtoniana considera al tiempo como un mero parámetro geométrico y la irreversibilidad asociada a un tiempo unidireccional como una herejía. Las ecuaciones de la mecánica newtoniana estudiaban problemas sencillos en situaciones idealizadas e irreales por ignorarse el rozamiento (veánse ejemplos en el recuadro inferior).

En el mundo de la Mecánica Newtoniana sólo lo ideal es objeto de ciencia y se desprecian los rozamientos que dan lugar a la irreversibilidad. La introducción del rozamiento plantea el problema del tiempo unidireccional, una flecha del tiempo, y la irreversibilidad propios de un contexto real. Esta fuerte divergencia entre la concepción newtoniana del tiempo y la de los procesos reales fue el comienzo de las discrepancias entre científicos y filósofos y humanistas. Estas discrepancias iniciales se agravaron al intentar generalizarse las leyes de la Mecánica a otras ramas del conocimiento, como la biología o la sociología, y llevaron a un posterior divorcio entre ambas corrientes de pensamiento dando lugar a lo que luego se ha dado en llamar las "Dos Culturas": la Cultura Humanista y la Cultura Científica; la primera ha devenido en "consciencia sin ciencia" y la segunda en "ciencia sin consciencia" (Morin, 1995). De esta manera se ha separado la reflexión filosófica de la teoría científica. Estas dos culturas han vivido, en gran medida, de espaldas la una a la otra hasta la actualidad y es causa importante de los grandes problemas que aquejan a la Humanidad.

Veremos, en los siguientes apartados, que la quiebra del Paradigma Mecanicista y la emergencia del Paradigma de la Complejidad sienta las bases epistemológicas y cosmológicas para

- Quizá el ejemplo más sencillo sea el del péndulo simple desprovisto de rozamiento. Conocida la longitud del péndulo y la posición inicial, las leyes de la dinámica predicen su posición en cualquier instante anterior o posterior. El movimiento de este péndulo idealizado no termina nunca y si lo grabásemos y proyectáramos posteriormente la película no notaríamos nada anormal; contrariamente a lo que ocurriría si la película fuera la de un cigarrillo quemándose.
- Un segundo ejemplo, típico de la Mecánica Newtoniana, es el del movimiento de un planeta o cometa alrededor del Sol. Conocidas la posición y velocidad en un instante cualquiera, considerado como inicial, pueden determinarse la posición y velocidad en otro instante cualquiera, anterior o posterior, con sólo aplicar las ecuaciones del movimiento. Así, se han calculado las fechas pasadas y futuras de aparición del cometa Halley.

que se supere esta brecha en el mundo del pensamiento y se cree una nueva cultura integral que se ha venido denominando la Tercera Cultura.

La crisis del Paradigma Mecanicista

Apoyada en los supuestos de inteligibilidad y objetivación la Ciencia Newtoniana se construyó sobre un conjunto amplio de conceptos entre los que destacan los de: reversibilidad, causalidad lineal, regularidad, determinismo, ley natural, orden natural, predecibilidad y estabilidad. El desarrollo de la Física a lo largo de los siglos XIX y XX, aunque fundamentalmente en este último, ha hecho que este conjunto de conceptos y los postulados fundamentales sobre los que se construyeron hayan entrado en crisis y puesto de manifiesto la obsolescencia de los planteamientos mecanicistas más radicales. Una importante consecuencia de todo ello es que se han sentado las bases para la superación del divorcio entre las corrientes humanista y científica del pensamiento.

Crisis del concepto de inteligibilidad

Este supuesto ha entrado en crisis debido fundamentalmente a las aportaciones hechas desde la Termodinámica y la Teoría (Matemática) de los Sistemas Dinámicos. Veámoslo brevemente limitándonos a sus aspectos conceptuales.

La Termodinámica rival de la Mecánica

En el año de 1811, coincidiendo con los éxitos más deslumbrantes de los físicos mecanicistas laplacianos, Fourier publicó su "Teoría de la Propagación del Calor en los Sólidos" que, al estar elaborada con el mismo rigor matemático de las leyes newtonianas, ponía en primer plano científico la irreversibilidad de los procesos naturales. A partir de ese momento la física matemática y la ciencia newtoniana dejaron de ser sinónimas.

En 1847, Joule enunció el Primer Principio de la Termodinámica, o de Conservación de la Energía, que supuso un paso decisivo al interpretar como un proceso de conversión de energía la conexión entre la química, la ciencia del calor, la electricidad y la biología y permitió explorar de manera coherente la multiplicidad y complejidad de los procesos naturales (Prigogine y Stengers, 1983).

William Thomson relacionó las pérdidas de calor y el rendimiento en las máquinas térmicas con la tendencia universal a la propagación irreversible del calor, o degradación de la energía, al enunciar el Segundo Principio de la Termodinámica. La articulación de estos dos grandes Principios permitió dar un salto vertiginoso desde la tecnología de las máquinas térmicas a la cosmología.

Clausius introdujo un nuevo concepto, el de entropía, que sirve para medir la irreversibilidad de los procesos y permitió que el Segundo Principio de la Termodinámica se reenunciara afirmando que: "La entropía de un sistema aislado aumenta hasta un máximo". Esta reformulación introdujo en la Física una "flecha del tiempo" que permite predecir, por tanto, la evolución irreversible de un sistema físico.

De esta manera quedó establecida una dualidad en la Física: por un lado la Dinámica, aplicable al mundo de las masas en movimiento, donde los fenómenos son reversibles y la Termodinámica, base de la ciencia de los procesos irreversibles, reales y complejos. Boltzmann, al introducir el concepto de probabilidad logró la integración de estas dos cosmologías relacionando los niveles microscópico de la materia, definido por un gran número de partículas, y macroscópico.

Los Sistemas Dinámicos No-integrables

A finales del s. XIX Poincaré distinguió entre sistemas dinámicos integrables y sistemas dinámicos no integrables.

Un sistema dinámico es integrable si es posible obtener una solución en forma de función analítica, o fórmula matemática precisa, que nos dé los valores de las variables del sistema para cada valor del tiempo. Los sistemas dinámicos integrables encuentran, para cada conjunto de condiciones iniciales, una única trayectoria que constituye la solución unívocamente determinada. Los sistemas dinámicos integrables tienen por tanto comportamiento regular y predecible. Un sistema dinámico es integrable cuando sus variables pueden definirse de manera que las interacciones entre sus partes, sean eliminadas. Para los sistemas dinámicos integrables puede decirse que todo viene dado ya desde el primer instante y nada puede suceder ya; el sistema, de esta manera, no cesa de repetir, bajo formas equivalentes, un estado inicial del que no olvida el más mínimo detalle (Prigogine, 1997).

Ejemplos de sistemas dinámicos integrables sencillos son el del péndulo simple sin rozamiento y que no esté sometido a ninguna otra fuerza que la de la gravedad. Un segundo ejemplo de sistema dinámico integrable, en el campo de la astronomía, es el denominado de " los dos cuerpos", consistente en dos astros cualesquiera que interactúan mediante la ley de la Gravitación Universal y donde se han ignorado las interacciones con los demás astros. En concreto son sistemas dinámicos integrables los formados por el Sol y La Tierra así como La Tierra y la Luna, o el formado por la Tierra y cualquier satélite artificial que orbite a su alrededor.

Si todos los sistemas dinámicos fueran integrables el mundo sería cerrado y reversible donde no habría lugar para la flecha del tiempo, ni la autoorganización ni proceso creativo o vital alguno. Sin embargo, la mayoría de los sistemas dinámicos son no-integrables.

Si el sistema dinámico es no-integrable entonces no siempre es posible obtener una función que permita saber los valores de las variables del sistema para cada valor del tiempo. Ya Poincaré, a finales del s. XIX, demostró que el denominado "problema de los tres cuerpos", cuyo ejemplo más familiar es el movimiento de la Luna influido simultáneamente por la Tierra y el Sol, no tiene solución analítica y es, por tanto, no- integrable.

A lo largo del siglo XX se han demostrado algunos teoremas matemáticos de imposibilidad que demuestran que las soluciones analíticas no pueden existir en algunas situaciones (Rañada, 1986).

La no-integrabilidad de algunos sistemas dinámicos permite una formulación estadística de las Leyes de la Dinámica al incluir la irreversibilidad y las probabilidades. Esta nueva formulación de la Mecánica Clásica podría llamarse determinista-aleatoria. Las ecuaciones, aunque son deterministas en su estructura matemática, pueden dar lugar a dos tipos de soluciones-trayectorias: trayectorias normales-deterministas y trayectorias aleatorias. Estos comportamientos regulares y caóticos están entremezclados entre sí.

Los sistemas dinámicos integrables y los totalmente desordenados o ergódicos son casos extremos, teniendo el sistema dinámico genérico soluciones de los dos tipos. Es por ello por lo que la regularidad y la irregularidad, el orden y el caos, la predecibilidad y la impredecibilidad, el determinismo y el indeterminismo están indisolublemente unidos de forma complementaria como las dos caras de la misma moneda. De esta manera surge una visión nueva: la de un Universo probabilista donde orden y caos, determinismo y probabilidades se juntan en un mundo complejo y creativo, muy alejado del mundo frío y cerrado del mecanicismo inicial que no dejaba nada al azar y a la iniciativa creadora individual (Prigogine, 1997).

Estos descubrimientos han trascendido el marco de las teorías matemáticas y físicas y han creado una importante ruptura epistemológica que han agravado la crisis de la cosmología newtoniana pues queda cuestionado el mismo concepto de ley física, ya que los sistemas caóticos no pueden ser predichos para tiempos mayores que un valor que depende de las condiciones iniciales y del grado de estocasticidad. Este valor puede aumentar mejorando los métodos de cálculo pero siempre corre más deprisa el número de operaciones a realizar para conseguirlo.

Los sistemas dinámicos no integrables tienen para algunos valores de los parámetros "sensibilidad fuerte a las condiciones iniciales", hecho que se conoce como "efecto mariposa"; este nombre fue acuñado por el meteorólogo norteamericano E. N. Lorenz, al proponer un modelo de sistema dinámico para la atmósfera, y hace referencia a que un cambio mínimo en las condiciones iniciales, producido por ejemplo por el aletear de una mariposa en la selva amazónica puede perturbar el comportamiento atmosférico en cualquier lugar del mundo.

Dado que nuestro sistema solar es un sistema dinámico con más de tres cuerpos puede afirmarse que constituye un sistema no integrable y por lo tanto no puede obtenerse una solución analítica que dé con exactitud los valores de las variables posición y velocidad para cada instante. Todo lo más que puede hacerse son cálculos aproximados despreciando interacciones al considerar sólo algunos astros. Los sistemas dinámicos en astronomía se encuentran con frecuencia cerca de ser sistemas integrables. Así, despreciando la influencia de los demás planetas, cada uno de ellos tiene una órbita regular alrededor del Sol. Los métodos de cálculo numérico proporcionan una buena aproximación para un tiempo finito, pero no aseguran la estabilidad para un tiempo infinito. Veamos algunos ejemplos:

La perturbación introducida por las fuerzas interplanetarias no destruye todas las órbitas regulares; esto se debe a que la masa de los demás planetas es pequeña comparada con la del Sol y de esta manera los planetas siguen trayectorias próximas a elipses. No obstante no puede afirmarse que esto será siempre así para todos los planetas y nunca se expulse un planeta o se produzca una colisión. Es probable que eso pueda haber ocurrido con algunos de los miembros menores del sistema solar, y es asimismo posible que vaya a ocurrir con Quirón, que se mueve en una órbita excéntrica inestable entre Saturno y Urano. En el recuadro inferior añadimos algunos casos que ilustran los conceptos introducidos anteriormente.

Crisis del supuesto de objetivación

El segundo supuesto de la Ciencia Moderna, el de objetivación fue atacado en sus bases epistemológicas por las aportaciones de la Mecánica Cuántica a principios del siglo XX, dando al traste con la pretensión de crear un conocimiento objetivo independiente del observador, al afirmar que objeto y sujeto del conocimiento están indisolublemente unidos. El observador perturba la naturaleza observada. Las propiedades de los átomos y moléculas no son más que potencialidades más o menos probables, hasta que una medición fija un valor; el resultado de la medición está asociado siempre a una probabilidad. El Principio de Indeterminación o Incertidumbre de Heisemberg pone cotas en la medición de las variables físicas observadas. Existe un Principio de Incertidumbre Generalizado que dice que así como en la Mecánica Cuántica el observador perturba al objeto observado, el cual perturba su percepción, así también el objeto y el sujeto se perturban

- *Ejemplo 1.* Un satélite de Saturno llamado Hiperión tiene una dinámica doblemente caótica; por una parte su forma no esférica se explica por el hecho de que la trayectoria caótica del sistema formado por Saturno, su satélite Titán e Hiperión, impide que se reacumulen fragmentos ya que si estos llegaran a esta trayectoria serían expulsados de ella. Por otro lado, el movimiento de rotación de Hiperión alrededor de su propio eje es asimismo caótico, siendo muy difícil predecir la dirección de su eje (Laskar y Froeschlè).
- *Ejemplo 2.* Gracias a un modelo matemático sencillo, implementado por ordenador, se ha podido demostrar que el cometa Halley tiene un movimiento caótico. Este resultado puede generalizarse a los demás cometas de los que, por sólo resistir un número limitado de pasos cerca del Sol, puede decirse que tienen una vida limitada en el tiempo.
- *Ejemplo 3.* Un péndulo simple sometido simultáneamente a una fuerza periódica y amortiguamiento tiene comportamiento irregular o caótico para ciertos valores de los parámetros amplitud y frecuencia de la fuerza aplicada (Rañada, 1990b).

mutuamente. Hay una incertidumbre fundamental, ontológica, entre el sujeto y el entorno, que sólo puede ser resuelta mediante una escisión ontológica absoluta, y por tanto falsa, sobre la realidad del sujeto o del objeto. Esta limitación ontológica al conocimiento objetivo y al determinismo es compatible con una concepción científica más humana en la que el sujeto no es extraño a la realidad observada. Es además un estímulo para el conocimiento pues abre la posibilidad de enriquecerlo, a la vez que lo hace menos cierto y por tanto más abierto (Morin, 1995).

Sistemas dinámicos y no-linealidad

El desarrollo de la Teoría (Matemática) de los Sistemas Dinámicos ha introducido un conjunto amplio de conceptos que rivalizan epistemológicamente con los conceptos clásicos de la Física Newtoniana Clásica; entre estos destacan los de: impredecibilidad, indeterminismo, irreversibilidad, emergencia, no linealidad, causalidad circular, caos determinista, bifurcación, no-proporcionalidad entre causa y efecto y autorregulación. Iremos viendo el significado de todos ellos a lo largo de los ejemplos que trataremos líneas abajo. Ello ha permitido a uno de los científicos que más han aportado al desarrollo de la Teoría de los Sistemas Dinámicos y a la explicitación del Paradigma de la Complejidad, el Premio Nobel de Química Ilya Prigogine, decir:

> "En la concepción clásica el determinismo era fundamental, y la probabilidad era una aproximación a la descripción determinista, debida a nuestra información imperfecta. Hoy la situación es a la inversa: las estructuras de la naturaleza nos constriñen a introducir la probabilidad independientemente de la información que poseamos. La descripción determinista no se aplica de hecho más que a situaciones sencillas, idealizadas que no son representativas de la realidad física que nos rodea".

La simulación matemática

Los dos métodos tradicionales de investigación en la Ciencia Mecanicista han sido la observación y la experimentación. El gran desarrollo de la Teoría (Matemática) de los Sistemas Dinámicos y de las Ciencias de la Computación ha introducido una nueva metodología de investigación: la modelación y la simulación matemática. Esta nueva metodología es una de las principales características de las Ciencias de la Complejidad.

Los *modelos matemáticos* no pretenden, como otros tipos de modelos, producir una copia exacta de la realidad, sino sólo representar algunas características de la realidad en forma de ecuaciones diferenciales.

Una vez elaborado el modelo matemático, debemos comparar las predicciones de éste con los datos del sistema. Si el modelo y los datos concuerdan, tendremos confianza en que las hipótesis hechas al crear el modelo son razonables y podremos usarlo para hacer predicciones; si no concuerdan, entonces debemos estudiar y mejorar nuestras suposiciones. En todo caso, aprenderemos más acerca del sistema real al compararlo con el modelo matemático de partida.

Los tipos de predicciones que son razonables dependen de nuestras hipótesis. Si nuestro modelo se basa en reglas precisas como las Leyes de la Dinámica de Newton sobre el movimiento, entonces podemos usarlo para hacer predicciones cuantitativas muy exactas. Si, en cambio, las hipótesis son menos precisas o si el modelo es una versión simplificada del sistema, entonces sería absurdo tratar de obtener predicciones cuantitativas exactas. La línea divisoria entre predicciones cualitativas y cuantitativas es en sí misma imprecisa, pero con frecuencia es mejor y más fácil usar cualitativamente aun el más preciso de los modelos (Blanchard, 1999).

Tipos de sistemas dinámicos

Matemáticamente un sistema dinámico se expresa como un conjunto de ecuaciones diferenciales en las que la variación con respecto al tiempo (derivada temporal) de cada una de las variables dependientes del tiempo viene expresada como una función matemática del conjunto de estas variables. Así, para el caso particular de dos variables, x e y, el sistema dinámico viene dado por las dos ecuaciones diferenciales siguientes

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x,y)$$

En general y dependiendo de la forma matemática que tengan las funciones f y g, la resolución exacta, mediante procedimientos analíticos, de este sistema de ecuaciones diferenciales es muy difícil y casi siempre imposible. Sin embargo en algunos casos es muy sencilla, como ocurre cuando se cumple la condición de linealidad, consistente en que las variables dependientes están elevadas a una potencia unidad. En este caso los sistemas dinámicos se llaman lineales.

Los sistemas dinámicos lineales pueden descomponerse en partes y cada una de ellas puede resolverse separadamente; la solución general se obtiene por recomposición y síntesis de las soluciones parciales. Esta idea de análisis-síntesis, central en el pensamiento de Descartes y en toda la Ciencia Mecanicista, ha sido extraordinariamente fecunda en la metodología científica al permitir reducir problemas complejos a problemas sencillos. En este sentido, un sistema dinámico lineal es precisamente igual a la suma de las partes y no se contemplan procesos de interacción alguno. Así, por ejemplo, un fenómeno lineal representado por dos variables cualesquiera, x e y, que varíen con el tiempo t, viene dado por el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy$$

donde a, b, c y d son coeficientes numéricos característicos de cada fenómeno. En la primera de las dos ecuaciones, el término ax indica que la variación de la variable x con el tiempo es proporcional a ella misma; análogamente, el término by señala que la variación temporal de la variable x es proporcional a la variable y; en consecuencia la primera de las ecuaciones recoge la idea de que la variación de la variable x con el tiempo es la suma de los efectos proporcionales a ambas variables; este hecho equivale a suponer que la variación total de una variable con respecto al tiempo es la suma de las variaciones de cada una de las variables dependientes. Este principio reduccionista, conocido en Física como Principio de Superposición, ha sido ampliamente aplicado en sus diversas ramas con resultados muy brillantes. Otro tanto puede decirse en relación a la segunda de las ecuaciones diferenciales.

La mayor parte de los fenómenos de la naturaleza son, sin embargo, no-lineales y si se intenta aplicarles el Principio de Superposición se fracasa estrepitosamente; Einstein sugirió al respecto que puesto que las ecuaciones fundamentales de la Física son no-lineales, habría que rehacer toda la física matemática; Simmons (1993) dice al respecto que "*...si su bola de cristal estaba limpia el día en que dijo tal cosa, las matemáticas del futuro serán, con certeza, muy diferentes de las del pasado y el presente*".

Un ejemplo sencillo típicamente no-lineal se observa cuando intentamos oír simultáneamente dos de nuestras canciones favoritas y no obtenemos el doble de placer.

En aquellos sistemas donde ocurren fenómenos no-lineales las partes que lo constituyen están interfiriendo, compitiendo o cooperando entre sí y rige el Principio Sistémico de que el todo es más (o menos) que la suma de las partes.

Matemáticamente los sistemas dinámicos no-lineales se caracterizan porque las variables x e y presentes en las funciones f y g no están elevadas a la unidad, sino a cualquier otra potencia o bien son funciones trigonométricas o de otro tipo. Desde el punto de vista de la resolución matemática, los sistemas dinámicos no-lineales son, en general, imposibles de resolver analíticamente y ha de recurrirse a técnicas cualitativas y/o soluciones aproximadas, para las que es extraordinariamente útil, cuando no imprescindible, la ayuda de técnicas computacionales.

Un ejemplo de un sistema dinámico no-lineal es el que modela el péndulo simple mediante las dos ecuaciones diferenciales siguientes

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{b}{m}\omega - \frac{g}{l}sen\theta$$

en el que las variables dependientes θ y ω representan, respectivamente, el ángulo de desviación respecto de la vertical y la velocidad de rotación. Los números *b, m, g* y *l* son, respectivamente, el coeficiente de fricción, la masa del péndulo, la aceleración de la gravedad y la longitud del péndulo. La aparición de la función trigonométrica hace que el sistema dinámico sea típicamente no lineal. En Física elemental se resuelve este problema despreciando el rozamiento ($b=0$) y suponiendo que el ángulo de desviación θ es pequeño, con lo cual se puede hacer la aproximación $sen\theta \cong \theta$. De esta manera el sistema dinámico no-lineal anterior se convierte en el siguiente que ya es lineal

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\theta$$

Este sistema lineal se resuelve analíticamente, y por tanto de forma exacta; de esta manera obtenemos la funciones que permiten calcular el ángulo θ para cada valor del tiempo, $\theta = \theta(t)$ y la velocidad de rotación $\omega = \omega(t)$; puede calcularse adicionalmente el periodo, *T*, del péndulo simple, dada por la fórmula de la Física elemental

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Hemos resuelto, de forma aproximada, el problema a costa de despreciar los efectos de rozamiento y sólo para pequeños desplazamientos angulares, con lo que hemos idealizado una situación alejándonos de la situación real y pagado, por tanto, el alto precio de ignorar la irreversibilidad, que es una de las características fundamentales de los procesos reales, tanto en el mundo inanimado como en el animado.

Un segundo ejemplo, tomado de la Ecología de Poblaciones, viene dado por el sistema dinámico no lineal sencillo de "dos especies en competencia", representado por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x - b_1 x^2 - c_1 xy$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2 y - b_2 y^2 - c_2 xy$$

La no-linealidad se observa en la presencia de los términos cuadráticos b_1x^2; b_2y^2; c_1xy; c_2xy donde los dos últimos representan las interacciones entre las dos especies (Edwards y Penney, 1994).

Métodos de análisis y resolución de los Sistemas Dinámicos

Tres son las técnicas, enfoques o métodos matemáticos principales empleados en la resolución y/o análisis de los Sistemas Dinámicos: *analítico, cualitativo y numérico* (Blanchard, 1999).

El *enfoque analítico*, es el enfoque clásico en la resolución de ecuaciones diferenciales y busca encontrar fórmulas precisas y explícitas que describan el comportamiento de las soluciones; esto quiere decir que permiten saber con precisión el valor que tendrá la variable dependiente estudiada en cada instante. Desafortunadamente, la gran mayoría de ecuaciones diferenciales no pueden resolverse con el método analítico y, por tanto, no es posible encontrar soluciones explícitas exactas. Es necesario entonces recurrir a otros métodos alternativos como los cualitativos y numéricos.

El *método cualitativo* es extraordinariamente útil para describir el comportamiento de las soluciones a largo plazo. Aunque su utilidad pueda parecer muy limitada en principio es, sin embargo, el tipo de conocimiento que buscamos con frecuencia.

El *enfoque numérico* utiliza métodos aproximados con la ayuda de la extraordinaria potencia de cálculo de los ordenadores actuales.

Cada uno de los métodos tiene sus ventajas e inconvenientes. Algunas veces ciertos métodos pueden ser muy útiles mientras que otros no lo son tanto. Una de nuestras tareas principales al estudiar las soluciones de los sistemas dinámicos es determinar qué métodos, o combinación de ellos, funciona bien en cada caso específico. En la mayoría de los casos se usarán lo tres métodos de forma complementaria.

La Didáctica de la No-linealidad

Tanto desde la Psicología de la Educación como desde la Didáctica de las Ciencias de la Naturaleza se ha insistido sobremanera, durante las últimas décadas, en la importancia de partir en los procesos de enseñanza-aprendizaje tanto de fenómenos físicos o biológicos familiares a los estudiantes como de experiencias relevantes relacionadas con su vida cotidiana y de interés social. Sin embargo:

a) Los grandes problemas a los que debe enfrentarse actualmente la Humanidad entre los que destacan los medioambientales, la conservación de ecosistemas y la explotación de recursos naturales son extraordinariamente complejos, debido no sólo al gran número de variables de distinto tipo que intervienen sino fundamentalmente a la interacción entre ellas que se reflejan en las características no-lineales de los sistemas dinámicos que los modelan. Esto hace muy difícil un tratamiento didáctico con las metodologías tradicionales de investigación: la observación y la experimentación. La observación directa es ineficaz por tratarse de fenómenos con cambios lentos que sólo pueden apreciarse a largo plazo. En las diversas ramas de la Biología la experimentación no puede aplicarse a sistemas reales debido también a la compleja interacción del gran número de variables que intervienen. En Física los métodos experimentales se limitan a estudiar fenómenos simples e idealizados para que se ajusten a modelos matemáticos sencillos que ignoran la irreversibilidad pero que estén al alcance de los conocimientos matemáticos del alumnado.

b) Por otro lado, desde nuestro punto de vista, un enfoque didáctico constructivista aplicado de forma mecánica y simplista ha promovido investigaciones sobre "concepciones previas" "preconceptos" o "errores conceptuales" del alumnado sin investigar, de manera paralela y en interacción con ellas, las concepciones de los profesores acerca del mismo tema. Este hecho tiene gran interés didáctico, pues las investigaciones se han centrado en fenómenos físicos idealizados que no consideran aspectos esenciales como el rozamiento con el aire como ilustra el que los libros de texto de Física de nivel de secundaria los ignoran debido a su aparentemente alto nivel matemático. Por el contrario, los alumnos cuando responden a cuestiones relativas a estos conceptos dentro del contexto escolar prescinden de sus conocimientos empíricos adquiridos fuera de él, que son, sin embargo, mucho más cercanos a la realidad que los explicados por los profesores. Conceptos como el coeficiente de penetración, C_X, de un coche o de un ciclista son, con frecuencia, mejor conocidos por algunos alumnos que por los profesores, según hemos podido comprobar en nuestra práctica educativa diaria.

Hechos como éste contribuyen, en buena medida, al fracaso escolar por centrar más los contenidos de Física en aspectos idealizados de la realidad y actividades encaminadas a la obtención de un resultado numérico preciso que a la comprensión profunda de los fenómenos y conceptos relevantes ligados a la experiencia del alumnado.

Sin embargo, en nuestra opinión, es posible actualmente introducir innovaciones importantes en la didáctica de las ciencias, tanto de los niveles de enseñanza secundaria como de los primeros cursos universitarios, si incorporamos los aspectos conceptuales y cualitativos de los grandes avances habidos a lo largo del siglo XX en la Teoría (Matemática) de los Sistemas

Dinámicos y sus aplicaciones a las diversas ramas de la Física y la Biología fundamentalmente. Estas innovaciones pueden influir positivamente no sólo en la dimensión cognitiva de cualquier aprendizaje sino también en sus aspectos motivacionales y actitudinales.

La incorporación de la simulación, como una nueva herramienta metodológica, permite abordar tanto el estudio de los fenómenos no lineales como sus aspectos didácticos, que son inabordables desde las perspectivas analíticas más tradicionales. La simulación mediante modelos matemáticos sencillos permite ilustrar fenómenos complejos. El análisis de estos modelos matemáticos puede hacerse mediante la metodología cualitativa, que pone el acento en el comportamiento a largo plazo de los fenómenos, y para la que es suficiente un conocimiento matemático a nivel de Bachillerato. La metodología cualitativa puede complementarse con técnicas informáticas que contribuyen a aumentar el rigor conceptual, la precisión en los cálculos y la comprensión de los fenómenos complejos.

Veamos algunos ejemplos sencillos pero familiares tomados de la Ecología de Poblaciones y de la Mecánica.

La No-linealidad en la Ecología de Poblaciones

Ilustraremos en las líneas que siguen el significado de algunos conceptos característicos de la no-linealidad con algunos ejemplos de interés y significatividad social.

Explotación de recursos naturales: La pesca

Consideremos un primer ejemplo, tomado de la Ecología de Poblaciones, que ilustrará de forma clara los efectos no-lineales de una tasa creciente e ilimitada de pesca sobre la población de una especie cualquiera de peces y que podría ilustrar las consecuencias dramáticas de la explotación de recursos renovables no sujetos a controles científicos y políticos rigurosos.

La tasa de crecimiento $\frac{dx}{dt}$ de la población x de una especie de peces si no hubiera limitación de recursos y espacio puede modelarse suponiendo que es proporcional al valor de la población en cada momento. Con estas suposiciones el sistema dinámico sería

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

donde el término ax se denomina potencial biótico de la especie y es la tasa potencial de crecimiento de la población si no hubiera limitación de alimentos y espacio vital. En este caso la población tendría un crecimiento exponencial ilimitado en el tiempo lo cual no es real. Si mejoramos el modelo suponiendo que hay limitación de recursos y espacio la ecuación diferencial puede reformularse para obtener la denominada ecuación logística

$$\frac{dx}{dt} = ax\left(\frac{K-x}{K}\right)$$

que recoge el hecho de que conforme la población crece, el potencial biótico se reduce según el factor $\frac{K-x}{K}$

que se denomina resistencia ambiental al crecimiento. El parámetro K representa el valor máximo de la población de peces que el hábitat puede mantener. En el caso en que la población alcance este valor, $x=K$, puede verse en la ecuación que la tasa de crecimiento se anula. Dicho en otros términos, el valor K representa la población de equilibrio estable o sumidero, ya que cualquier alteración de este valor, por encima o por debajo, hace que la tasa de crecimiento sea negativa o positiva respectivamente. Dado que la población oscila alrededor de su máximo valor puede decirse que el sistema se autorregula.

Veamos el efecto de la variación de la tasa de pesca sobre el crecimiento de la población de peces y la supervivencia del propio caladero. Si designamos la tasa de pesca por el parámetro p, entonces la ecuación logística queda modificada para dar

$$\frac{dx}{dt} = ax\left(\frac{K-x}{K}\right) - p$$

Por métodos cualitativos sencillos, al nivel maemático de Bachillerato, puede demostrarse que existe un valor para la tasa de pesca llamado tasa de bifurcación p_b, dado por $p_b \frac{aK}{4}$ para el que la población alcanza el valor estable o sumidero

$$x = \frac{K}{2}$$

A partir de ahí, para un valor cualquiera de la tasa de pesca, p_d, superior a la tasa de bifurcación, $p_d > p_b$ ocurre algo dramático ya que la población x disminuye de forma continua hasta desaparecer. No hay ya forma alguna de evitar que la población de peces se extinga: el fenómeno es irreversible y el drama se hace inevitable (de ahí el subíndice "d") (Blanchard, Devaney y Hall, 1999).

Vemos que el hecho de que una pequeña tasa de capturas produzca sólo una pequeña disminución de la población a largo plazo, no implica necesariamente que un poco más de pesca cause sólo una pequeña disminución adicional de la población. Una vez que se ha sobrepasado el valor de la bifurcación, la población de peces tiende a cero inevitablemente. Ha emergido una nueva situación y se dice que la población ha entrado en un sumidero de extinción.

Esta variación del número de capturas introduce una complejidad extraordinaria y hace que aumente la importancia de las decisiones para que no ocurran hechos irreversibles que pueden ser dramáticos.

Es importante hacer notar que el valor de bifurcación es un valor teórico y que en la práctica suceden hechos aleatorios, no predecibles ni controlables, que hacen que pueda desplazarse hacia valores inferiores con lo cual es fundamental mantenerse alejados de dicho valor.

Este fenómeno ilustra claramente la falta de proporcionalidad entre causa y efecto pues una pequeña variación en el fenómeno considerado como causante, la tasa de pesca, produce una disminución desproporcionadamente mayor en la población. Pequeños efectos producen grandes causas. No rige, por tanto, el principio de proporcionalidad ya que este fenómeno es claramente no-lineal.

La experiencia nos dice que la pesca incontrolada de muchas especies ha producido fenómenos catastróficos reales como en el caso de la extinción de los caladeros de anchoas peruanas (Romero Romero y García Vázquez, 1998).

Dos especies en competencia

Consideremos como segundo ejemplo, bien conocido en la Ecología de Poblaciones, el caso de dos especies en competencia. Este fenómeno típicamente no-lineal puede hacerse extensivo a otros ámbitos distintos al de la Biología donde dos especies de cualquier tipo: sociales, económicas, psicológicas, etc. puedan competir. Asimismo es fácilmente generalizable a los fenómenos de cooperación, también en cualquier ámbito, sin más que cambiar el signo de los términos cruzados (productos xy).

Sean $x(t)$, $y(t)$ las poblaciones en el tiempo t de las especies 1 y 2, respectivamente. Sean además, K_1 y K_2 las poblaciones máximas de las especies 1 y 2.

Como en el ejemplo anterior, los términos a_1x, a_2y son los potenciales bióticos de cada una de las especies y si los individuos de la especie no excretan algún producto residual tóxico. Sin embargo, conforme la población crece, el potencial biótico de las dos especies se reduce según los factores

$$\frac{K_1 - x}{K_1} \quad \text{y} \quad \frac{K_2 - y}{K_2}$$

que son denominados resistencia ambiental al crecimiento de cada una de las dos especies.

Las constantes α y β indican el grado de influencia de una especie sobre la otra. Si los intereses de las dos especies no son coincidentes y ocupan nichos separados, entonces tanto α como β serán muy cercanas a la unidad. Por otro lado, si una de las especies –por ejemplo la especie 2– utiliza el medio ambiente de manera ineficiente; es decir, si consume grandes cantidades de alimento y excreta productos residuales altamente nocivos, entonces un individuo de la especie 2 ocupará el lugar de muchos individuos de la especie 1. En este caso, el coeficiente α será muy grande.

Entonces las tasas de cambio en las poblaciones x e y satisfacen el sistema dinámico siguiente

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x\left(\frac{K_1 - x - \alpha y}{K_1}\right)$$
$$\frac{dy}{dt} = a_2 y\left(\frac{K_2 - y - \beta x}{K_2}\right)$$

Puede verificarse fácilmente la equivalencia matemática de la formulación de este sistema dinámico con la dada al final del apartado 2.2

Un análisis matemático-cualitativo riguroso del sistema dinámico anterior demuestra que pueden darse cuatro casos, dependiendo de los valores relativos de los coeficientes de las dos ecuaciones (Braun, 1990):

Caso 1.- Los parámetros cumplen los siguiente requisitos

$$K_1/\alpha > K_2\,,\ K_2/\beta < K_1$$

En este caso puede demostrarse que $y(t)$ tiende a cero cuando t tiende a infinito, para toda solución $x(t)$, $y(t)$. Es decir, a largo plazo, la especie y se extingue siempre, independientemente de los valores de las poblaciones iniciales de cada una de las poblaciones.

Caso 2.- Los parámetros cumplen las desigualdades

$$K_1/\alpha < K_2\,,\ K_2/\beta > K_1$$

En este caso $x(t)$ tiende a cero cuando t tiende a infinito. En otras palabras, a largo plazo es ahora la especie x la que se extingue y es la especie y la que siempre sobrevive. Esta extinción es independiente de los valores de las poblaciones iniciales de cada una de las dos especies.

Caso 3.- Los parámetros cumplen los siguiente requisitos

$$K_1/\alpha > K_2\,,\ K_2/\beta > K_1$$

En este caso las dos especies pueden coexistir sin ningún problema a largo plazo, independientemente de los valores iniciales de las poblaciones, y alcanzan unas poblaciones estables dadas por los valores de equilibrio siguientes

$$x_{eq} = \frac{K_1 - \alpha K_2}{1-\alpha\beta}$$
$$y_{eq} = \frac{K_2 - \beta K_1}{1-\alpha\beta}$$

Caso 4.- Los parámetros cumplen los siguiente requisitos

$$K_1/\alpha < K_2\,,\ K_2/\beta < K_1$$

En este caso para determinados valores extraordinariamente precisos de las poblaciones iniciales $x(t{=}0)$, $y(t{=}0)$, que son dramáticamente críticos, existen unas poblaciones de equilibrio inestable dado por

$$x_{eq} = \frac{K_1 - \alpha K_2}{1-\alpha\beta}$$
$$y_{eq} = \frac{K_2 - \beta K_1}{1-\alpha\beta}$$

Estas poblaciones de equilibrio existen sólo en la teoría, pues en la práctica no pueden mantenerse, ya que ocurren sucesos aleatorios que hacen que las poblaciones en algún instante salgan del conjunto de valores críticos.

Así, como caso particular, podemos comprobar que dos especies que compiten por un mismo nicho y vengan dadas por los parámetros

$$a_1{=}60;\ a_2{=}42;\ K_1{=}20;\ K_2{=}14;\ \alpha{=}4/3;\ \beta{=}2/3$$

cumplen las desigualdades dadas por el Caso 3 y por lo tanto coexistirán perfectamente sean cuales sean los valores de las poblaciones iniciales de cada una de ellas.

Cualquier variación de algunos de los parámetros K_1, K_2, α y β puede afectar a la topología del retrato fase y por tanto cambiar sustancialmente la evolución de las dos especies. Así, por ejemplo siendo

$$\frac{K_2}{\beta} < K_1$$

si el parámetro α disminuye tanto que la condición

$$\frac{K_1}{\alpha} < K_2$$

deja de cumplirse para pasar a ser

$$\frac{K_1}{\alpha} > K_2$$

entonces la topología del retrato fase pasa de ser la del caso 4 a la del caso 1; esto quiere decir que la especie 2 se extinguirá y la especie 1 sobrevivirá. De forma análoga, si estando en el caso 4, el parámetro β disminuye de tal manera que la condición $K_2 / \beta < K_1$ deja de cumplirse para pasar a ser

$$\frac{K_2}{\beta} > K_1$$

entonces la topología del plano fase pasa a ser la del caso 2; quiere esto decir que ahora la especie 1 será la que se extinguirá y la especie 2 será la que sobrevivirá.

La didáctica del modelo, en sus aspectos conceptuales, podría centrarse en el significado biológico de los parámetros del sistema dinámico así como en las influencias externas que hacen que estos modifiquen sus valores numéricos. En el aspecto matemático-cualitativo, el principal interés consiste en el estudio del cambio de los valores numéricos de los parámetros y en el correspondiente cambio de fase.

La No-linealidad en Mecánica

Entre los fenómenos físicos familiares y significativos para el alumnado destacan tanto aquellos que ocurren en los juegos en los que se utilizan diversos tipos de pelotas, como aquellos otros relacionados con los movimientos cotidianos de coches, motos y bicicletas. Los programas escolares y la didáctica tradicional enfocan el estudio de estos fenómenos no-lineales de una forma totalmente idealizada ignorando, para prescindir de su complicación matemática, el rozamiento con el aire de las pelotas o bolas. Esta idealización conlleva el inconveniente de alejar el enfoque del aula de las experiencias cotidianas que tienen los estudiantes de su práctica en el juego y les lleva a tener dos sistemas conceptuales alternativos que pueden conmutar en función del ámbito en que se encuentren: idealizado-ficticio para el ambiente escolar y empírico- realista para el ámbito no-escolar.

La consideración de los aspectos no-lineales, de fenómenos tan cotidianos y familiares para el alumnado como el rozamiento con el aire de móviles, permitiría integrar la Física del aula con el conocimiento previo y real que tienen los alumnos acerca de dichos fenómenos y que han adquirido, fundamentalmente, por las experiencias ligadas al juego y a su aprendizaje informal y espontáneo. Si los recursos didácticos incluyen el estudio de los fenómenos no-lineales, que son los más frecuentes en la naturaleza, disminuiría la discrepancia entre los aprendizajes formales e informales de los estudiantes y consecuentemente mejoraría el éxito escolar. Consideremos, a título de ejemplo, dos familias de fenómenos habituales en el estudio de la Mecánica en la Enseñanza Secundaria.

Movimiento vertical y tiro de proyectiles

La enseñanza escolar considera los cuerpos que caen como si estuvieran en el vacío y por tanto lo hicieran libremente (con la "aceleración de la gravedad $9{,}8\,{}^{m}\!/_{s^2}$ ").

Esta enseñanza choca frontalmente con los esquemas conceptuales que los alumnos han construido en el ámbito del juego, donde han observado que los cuerpos tardan en caer más o menos dependiendo de su forma, tamaño y masa.

Por ejemplo, si se ignora el efecto del rozamiento con el aire en el movimiento de caída de las gotas de lluvia éstas dejarían de ser inofensivas y, sin embargo, así es como se estudia en el aula al considerarlo como un fenómeno de caída libre. Sabemos, por el contrario, que una gota de lluvia de 2 mm de radio llega al suelo con una velocidad terminal aproximada de 9 m/s (Serway, 1985), mientras que si cayera libremente desde una altura de 5 Km alcanzaría al llegar al suelo una velocidad algo mayor de 300 m/s, equivalente a unos 1000 Km/h. Esto supone una discrepancia extraordinariamente grande entre los resultados de los cálculos teóricos idealizados y totalmente ficticios y la realidad percibida. ¿Con estos datos, pueden realmente nuestros alumnos conciliar sus experiencias informales con los cálculos idealizados de las actividades del aula propuestas por los profesores y libros de texto?

El estudio de la caída de cuerpos en la atmósfera, considerando el rozamiento con el aire, permite la oportunidad de introducir conceptos típicamente no-lineales como los de causalidad circular y autorregulación.

Puede suponerse, como hipótesis realista, que el rozamiento del aire es proporcional a alguna potencia de la velocidad dependiendo del rango de velocidades y de la forma del objeto que cae. La constante de proporcionalidad, K, depende, a su vez, de la forma y tamaño del cuerpo. Experimentalmente se ha encontrado que para cuerpos pequeños puede tomarse la primera potencia de la velocidad siempre que la velocidad se mantenga inferior a unos 24 m/s, y una aproximación cuadrática para velocidades superiores pero inferiores a la del sonido (Marion, 1975). Si la fuerza de fricción, f, es, por ejemplo, proporcional al cuadrado de la velocidad tiene la forma matemática $f = kv^2$. Entonces la fuerza resultante F_R viene dada por la ecuación

$$F_R = mg - kv^2$$

en cuyo caso la aplicación de la Segunda Ley de Newton conduce a la obtención de la aceleración

$$a = \frac{F_R}{m} = g - \frac{kv^2}{m}$$

que demuestra que efectivamente nuestros alumnos tienen razón cuando afirman que la aceleración de caída depende de la masa del cuerpo, m, y de su forma y tamaño, k. Dado que la aceleración depende de la velocidad y ésta a su vez de la primera queda establecida una causalidad circular. Si suponemos que, durante cada uno de los pequeños intervalos de tiempo, Δt, la aceleración es constante, entonces la última fórmula puede complementarse con la elemental y familiar de

$$v_{t+\Delta t} = v_t + a\Delta t$$

De esta manera puede obtenerse la tabla de valores de la velocidad en función del tiempo de acuerdo a la secuencia

$$v(t=0) \rightarrow a(t=0=g) \rightarrow v(t=\Delta t) \rightarrow a(t=\Delta t) \rightarrow v(t=2\Delta t) \rightarrow ..$$

donde los intervalos de tiempo, Δt, pueden tomarse tan pequeños como se quiera; sin embargo, para ilustrar cualitativamente el fenómeno bastaría con tomar intervalos de 1 segundo. De esta manera, se obtendría una línea poligonal para la gráfica de la velocidad en función del tiempo. Tomando intervalos de tiempo cada vez menores puede comprobarse que la línea poligonal se va aproximando a una curva de pendiente cada vez menor hasta llegar un instante en que la aceleración se hace cero y la velocidad constante igual a la velocidad límite.

Es ilustrativo y muy didáctico la demostración del valor de la velocidad límite, v_l, considerando que se alcanza cuando la aceleración se anula. Esto lleva a

$$v_l = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

que vuelve a dar la razón a nuestros alumnos "físicos experimentales aficionados" cuando afirman que la velocidad de caída depende de la masa del cuerpo que cae y de su tamaño y forma. El hecho de que la velocidad se mantenga fija en el valor límite ilustra el concepto no-lineal de autorregulación.

Un conjunto muy amplio de actividades de interés para los alumnos puede diseñarse en relación a las actividades deportivas donde se emplean pelotas; así, por ejemplo, la enseñanza habitual del "Tiro de proyectiles" que se hace suponiendo que tiene lugar en el vacío, tiene que ser replanteada teniendo en cuenta el efecto nolineal del rozamiento con el aire, ya que es éste el causante de fenómenos tan espectaculares como el "liftado" en el tenis o los tiros con efecto en el fútbol y otros deportes que seguro que atraen la atención, cuando menos inicialmente, de nuestros alumnos.

Vehículos terrestres

Otro tema de gran interés didáctico para el alumnado de secundaria es el del movimiento de vehículos familiares: coches, motos y bicicletas fundamentalmente.

La didáctica habitual de la Cinemática y Dinámica de estos vehículos, al ignorar la resistencia del aire, lleva a que la aceleración es constante y, en consecuencia, a resultados absurdos del tipo de los comentados en el párrafo anterior. Un estudio más realista de la Cinemática puede hacerse suponiendo la hipótesis de que la aceleración no es constante sino que es, en cada momento, proporcional a la diferencia entre la velocidad terminal o límite, v_l, y la velocidad en ese instante, v_t, es decir

$$a = \frac{dv}{dt} = k(v_l - v_t)$$

Por otra parte, la Dinámica puede enfocarse bajo la hipótesis de que la resistencia del aire, *f*, es proporcional al cuadrado de la velocidad, donde la constante de proporcionalidad depende a su vez de la forma, C_x, de la superficie frontal del vehículo *A* y de la densidad del aire ρ. Si F_R designa la fuerza resultante sobre el vehículo, F_T la fuerza de tracción, y suponiendo que se mueve en una carretera horizontal tenemos

$$F_R = F_T - f = F_T - \frac{1}{2} C_x A\rho v^2$$

y después de aplicar la Segunda Ley de Newton de la Dinámica obtener el valor de la aceleración

$$a = \frac{F_T - \frac{1}{2} C_x A\rho v^2}{m}$$

cuya forma nos permite deducir las mismas conclusiones que en los fenómenos de caída libre.

Puede calcularse el valor de la velocidad límite como el valor particular de la velocidad cuando la aceleración se anula

$$v_l = \sqrt{\frac{2F_T}{C_x A\rho}}$$

que es coherente con las observaciones empíricas del alumnado.

Conclusiones

De lo expuesto en los apartados anteriores pueden extraerse consecuencias importantes para la Filosofía de la Ciencia, el Pensamiento y la Didáctica de las Ciencias.

Implicaciones para la Filosofía de la Ciencia y la Educación

Hemos visto que la Teoría (Matemática) de los Sistemas Dinámicos demuestra que en los sistemas complejos, como la Naturaleza y las sociedades, no existen comportamientos deterministas puros sino que pueden darse evoluciones aleatorias para determinados valores de algunas variables. Dependiendo de los valores iniciales, los sistemas pueden tener evoluciones impredecibles. Estos comportamientos son la norma y no la excepción. No es posible, por tanto, predecir el futuro de la sociedad y del entorno físico, ya que no están determinados por leyes externas ajenas a la voluntad humana sino que está abierto y depende de nuestras acciones.

Por lo tanto, la vieja pretensión de los sociólogos, psicólogos y biólogos mecanicistas de tomar la Física Determinista Newtoniana como modelo de ciencia ha resultado desacertada a la luz de la evolución experimentada por la Física en los últimos tiempos. Todavía hoy, sin embargo, están muy arraigados los determinismos científico, tecnológico, biológico y social cuya influencia es nefasta tanto para el conjunto de la sociedad como para el ámbito educativo. Para refutar estos planteamientos es importante tener en consideración las últimas aportaciones hechas por la Teoría (Matemática) de los Sistemas Dinámicos. Conocer los principales hallazgos de la ciencia actual y aplicarlos a la realidad social y natural parece hoy, más que nunca, un deber.

Creemos firmemente que la Educación en general y la Didáctica de las Ciencias en particular pueden y deben ser reconceptualizadas desde nuevos fundamentos construidos en torno a los conceptos de indeterminismo, irreversibilidad, incertidumbre y apertura.

Ello permitirá alejarnos de análisis simplistas, en gran medida interesados, y afrontar los graves problemas de la Humanidad con una visión científica actualizada. Si como afirma el profesor Córdoba Zurita (2003) el "riesgo mayor de la civilización humana proviene del hecho de que el ser humano puede más que sabe" es más necesario que nunca una comunicación fluida y permanente entre humanistas y científicos. Esto abriría la posibilidad de intervenir activamente en la construcción de un mundo mejor, en el que las ciencias de la naturaleza y las ciencias sociales estén indisolublemente unidas. Todo ello facilitaría la emergencia de la Tercera Cultura. En ese reto nos sentimos comprometidos.

Implicaciones para la Didáctica de las Ciencias

Entendemos que la combinación de la metodología matemática-cualitativa en el análisis de los sistemas dinámicos con técnicas informáticas sencillas permite utilizar, de forma relativamente fácil, la simulación-modelación matemática en el estudio de fenómenos complejos (no-lineales) en sus aspectos más básicos. Todo ello dentro de metodologías didácticas innovadoras que, teniendo en cuenta el estado actual del desarrollo de la Física y la Biología, partan de los aprendizajes informales de los alumnos en aquellos fenómenos en los que no era posible hacerlo anteriormente debido a su complejidad, ritmo de cambio, imposibilidad de observación y/o experimentación y dificultad matemática.

REFERENCIAS

ALONSO, M. y FINN E. J. (1992). *Physics.* Addison-Wesley.

BLANCHARD, P.; DEVANEY, R. L. y HALL, G. R. (1999). *Ecuaciones diferenciales.* México: Ed. Thomson.

BRAUN, M. (1990) *Ecuaciones Diferenciales y sus aplicaciones.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

CORDOBA, A. (2003). Civilización tecnológica y globalización. *Alfa. Revista de la Asociación Andaluza de Filosofía, 12.* Año VI., pp. 143-151.

EDWARDS, C. H. y PENNEY, D. E. (1994). *Ecuaciones diferenciales elementales y problemas con condiciones en la frontera.* México: Prentice-Hall.

LAMO DE ESPINOSA, E, GONZÁLEZ GARCÍA, J. M. y TORRES ALBERO, C. (1994). *La sociología del conocimiento científico.* Madrid: Alianza Editorial.

LASKAR, J. y FROESCHLÈ. (s/f). El caos en el sistema solar. *Mundo Científico, 115.* Vol. 11, pp. 732-740.

MARION, J. B. (1975). *Dinámica Clásica de las partículas y sistemas.* Barcelona: Reverté.

MORENO, I. (2002). *La globalización y Andalucía. Entre el mercado y la identidad.* Sevilla: Mergablum.

MORIN, E. (1995). *Introducción al pensamiento complejo.* Barcelona: Gedisa.

PRIGOGINE, I. (1997). *El fin de las certidumbres.* Madrid: Editorial Santillana-Taurus.

PRIGOGINE, I. y STENGERS, I.(1983). *La nueva alianza. Metamorfosis de la ciencia.* Madrid: Alianza Editorial.

RAÑADA, A. (1986). "Movimiento caótico" en *Orden y caos,* pp. 66-77. *Investigación y Ciencia.* Barcelona: Editorial Prensa Científica.

RAÑADA, A. (1990a). "Introducción" en *Orden y caos,* pp. 4-8. *Investigación y Ciencia.* Barcelona: Editorial Prensa Científica.

RAÑADA, A. (1990b). *Dinámica Clásica.* Madrid: Alianza Editorial.

ROMERO, J. L. y GARCÍA VÁZQUEZ, C. (1998). *Modelos y Sistemas Dinámicos.* Servicio de Publicaciones Universidad de Cádiz.

SCHRÖDINGER (1975). *¿Qué es una ley de la naturaleza?* México: Fondo de Cultura Económica.

SERWAY, R. A. (1987). *Física.* México: Ed. Interamericana.

SIMMONS, G. F. (1993). *Ecuaciones Diferenciales.* Madrid: McGraw-Hill.

TOULMIN, S. (2002). *Cosmópolis. El trasfondo de la modernidad.* Barcelona: Península.

SUMMARY

We review in this article the contribution that Physics itself has made to the epistemological crisis of Newtonian Mechanicism, and, in consequence, to the development of the Paradigm of Complexity. The study of non-linear phenomena and the (Mathematical) Theory of Dynamic Systems are highlighted. Substantial changes in education and the teaching of science are proposed, in agreement with the present view of Physics and development in Mathematics and Computer Science.

RÉSUMÉ

Cet article fait référence à la contribution apportée par la Physique à la crise épistémologique du Mecanicisme Newtonien et, par conséquent, au développement du Paradigme de la Complexité. On y insiste sur la Théorie (Mathématique) des Systèmes Dynamiques et sur l'étude des phénomènes non-linéaires. C'est donc à partir de là que l'on propose des changements importants dans l'éducation et dans l'enseignement des sciences adaptés à la conception actuelle de la Physique et aux progrès des Mathématiques et de l'Informatique.