

Este artículo recoge la información procedente de un trabajo de investigación en torno a los modelos explicativos sobre el fenómeno de las estaciones terrestres de un grupo de futuros profesores de primaria. Se centra la reflexión sobre uno de los aspectos que ha resultado ser más significativo: la influencia del conocimiento matemático en la comprensión del modelo y de su aplicación. Se puede observar cómo una deficiente elaboración y comprensión de las nociones matemáticas puede convertirse en un importante obstáculo en la elaboración de modelos explicativos adecuados del fenómeno de las estaciones.

PALABRAS CLAVE: *Didácticas específicas; Conocimiento matemático; Concepciones sobre las estaciones de la Tierra; Formación de profesores.*

La interacción del conocimiento matemático con otros conocimientos. Un estudio sobre los modelos explicativos de las estaciones terrestres

pp. 49-62

Pilar Azcárate
Antonio Navarrete
José María Oliva*

Introducción

En la actual organización curricular, tanto en Primaria como en Secundaria, los alumnos acceden al conocimiento desde un tratamiento disciplinar en el que las fronteras están perfectamente delimitadas y se establecen pocos puentes entre ellas. Los conocimientos son presentados y tratados en las aulas de forma independiente, sin establecer interconexiones entre los diferentes campos. Se tratan las situaciones y los conocimientos matemáticos que las modelizan o explican, de forma independiente. Habitualmente éste es presentado en las aulas desde perspectivas formales, focalizado en el ámbito operativo y, en la mayoría

de las ocasiones, tratados en situaciones matemáticas de aplicación directa, sin realizar ningún estudio fenomenológico que permita al alumno entender el sentido y la finalidad del conocimiento matemático como medio para modelizar e intervenir en la realidad.

Ello conlleva que gran parte de los conocimientos matemáticos se elaboren de forma estática, con poca capacidad de ser aplicados dinámicamente a nuevas situaciones y mucho menos para extrapolar su significado a lo hora de ser aplicados en la comprensión y explicación de fenómenos y situaciones no matemáticas.

Sin embargo, el conocimiento y dominio del entorno en que se han de integrar los

* Los autores son miembros del Grupo de Investigación HUM462; P. Azcárate y A. Navarrete pertenecen al Departamento de Didáctica de la Universidad de Cádiz; J. M^o Oliva es asesor del Centro de Profesorado de Cádiz. E-mails: pilar.azcarate@uca.es; antonio.navarrete@uca.es; jmoliva@cepcadiz.com

✉ Artículo recibido el 22 de noviembre de 2004 y aceptado en enero de 2005.

alumnos, demanda una formación más global y compleja, que rompa la actual división del conocimiento escolar en compartimentos estancos y dé paso a nuevos enfoques que respondan a visiones al menos interdisciplinarias. Visiones que favorezcan un acceso al conocimiento de la realidad desde posturas más transversales, donde las relaciones entre los conocimientos se puedan establecer y donde los conocimientos matemáticos adquieran ese papel -que deberían tener- de instrumentos funcionales y formativos para la comprensión de la realidad.

Esta realidad es algo que, desde nuestra posición de formadores de futuros maestros, venimos detectando en nuestras aulas. La naturaleza y organización del conocimiento del que disponen nuestros alumnos al acceder a las aulas universitarias es de carácter muy deficitario, confinado en compartimentos sin relación entre ellos. Hecho que dificulta su proceso formativo ya que es este conocimiento sobre el que han de reflexionar y el que ha de ser objeto de enseñanza para sus futuros alumnos. Así mismo, ese hecho condiciona la elaboración del propio conocimiento profesional y su saber sobre el conocimiento que han de enseñar (Azcárate, 1999; Navarrete, Azcárate y Oliva, 2001).

El conocimiento científico y matemático del que disponen los estudiantes de nuestras aulas de formación es muy limitado y se centra en informaciones organizadas formalmente, sin significado fuera del contexto escolar, y, por tanto, sin poder explicativo de los fenómenos de la realidad. Son alumnos que provienen de la Educación Secundaria, etapa en que, por su organización, las relaciones entre los conocimientos matemáticos y científicos son escasas y, en la que el propio currículo refleja grandes desniveles en su organización. Se trabajan fenómenos físicos que necesitan de conocimientos matemáticos que, paradójicamente, se abordan con posterioridad. Y, por otro lado, se presentan los conocimientos matemáticos al margen de las situaciones reales que los justifican y en las que han de ser aplicados.

El trabajo que presentamos refleja las grandes dificultades que presentan los componentes de un grupo de futuros maestros de Educación

Primaria para entender y explicar un fenómeno tan cotidiano como es el de los ciclos estacionales, desde su deficiente comprensión de las ideas matemáticas que están utilizando y que necesitan para su estudio, como pueden ser la noción de proporcionalidad, el concepto de elipse, la capacidad operativa, sin entrar con cuestiones más globales como su falta de visión espacial y (en consecuencia)/o ausencia de capacidades gráficas o representacionales.

Contexto, referentes y desarrollo del estudio

El estudio se realiza en el ámbito de un proceso formativo dirigido a futuros profesores de Primaria. El diseño del proceso formativo se enmarca dentro del ámbito general del proyecto curricular IRES (Investigación y Renovación Escolar) (Porlán, 1993; García et al., 2001), desde el que se pretende la transformación progresiva de la escuela a través del desarrollo personal y grupal de alumnos y profesores. La investigación, tanto en alumnos como en profesores, se concibe como un principio didáctico bajo perspectivas complementarias e integradoras: sistémica y compleja, constructivista y crítica (Porlán et al., 1996).

En este contexto, como formadores, hemos observado que la mayoría de alumnos no disponen de conocimientos aceptables para explicar determinados fenómenos cotidianos, como es el fenómeno de las estaciones, y suelen mostrar serias dificultades para reelaborarlos cuando son objeto de enseñanza en las aulas formativas. El objeto central de la investigación desarrollada es arrojar luz sobre los obstáculos que dificultan dicha elaboración y sobre en qué medida es posible favorecerla, lo cual podría servir en el futuro para diseñar nuevos procesos formativos (Navarrete, 2004). En esta línea, la cuestión central que ha orientado esta investigación quedó formulada como sigue: "¿Qué modelos explicativos utilizan inicialmente nuestros alumnos para explicar las estaciones terrestres y qué dificultades surgen cuando se intenta hacer evolucionar dichos

modelos hacia otros más cercanos al punto de vista científico?”

La concreción del problema nos permitió centrar nuestro estudio sobre los siguientes aspectos: los modelos explicativos iniciales; las dificultades y obstáculos que surgen al hacerlos evolucionar; y los cambios que se consiguen al final del proceso. En este artículo nos centramos en el análisis de las dificultades matemáticas encontradas en las ideas y modelos explicativos de los alumnos, ideas y modelos que se convierten en obstáculos para la evolución comprensiva del fenómeno.

Inicialmente se hizo un riguroso análisis de la literatura existente sobre dificultades y modelos explicativos en este ámbito (Navarrete, Oliva y Azcárate, 2004), lo que nos permitió detectar que la mayoría de los estudios realizados con anterioridad son descriptivos, que hay pocos estudios que profundicen sobre los procesos de aprendizaje en el aula y, por último, que los instrumentos utilizados son limitados y no favorecen la triangulación.

Nuestro trabajo intenta superar algunas de las limitaciones detectadas en estudios previos. Se ha realizado desde un enfoque metodológico naturalístico, de corte cualitativo e interpretativo, con la intención de comprender e interpretar la realidad en su contexto original. Dentro de este enfoque general se ha optado, como estrategia de investigación, por el estudio de casos múltiples (Stake, 1994), realizando un estudio longitudinal de cada caso y otro final transversal a todos ellos. Seis fueron los casos estudiados, cada uno formado por 4 o 5 sujetos, coincidentes con seis (1, 3, 5, 7, 8 y 11) de los doce grupos de trabajo de aula que durante siete días realizaron una experiencia de aprendizaje, en torno a los movimientos relativos del sistema Sol-Tierra, integrada en el proceso formativo.

Los instrumentos utilizados para recoger la información han sido: el cuestionario, el portafolio, la entrevista y los informes personales de reconstrucción y análisis de la experiencia que, sobre el propio proceso desarrollado, elaboraron cada uno de los sujetos implicados. La información procedente de todos los instrumentos fue transcrita y posteriormente reducida se-

gún los procedimientos habituales (Rodríguez et al., 1999) para facilitar su análisis. Antes de reducir la información fue preciso fragmentarla en unidades de análisis, proceso que se hizo en función del instrumento concreto a partir del cual trabajamos. Tanto en el caso de los cuestionarios, como en el portafolio, la unidad de análisis elegida consistió en los modelos explicativos, gráficos o verbales, aportados en los escritos. En el caso del informe final, la información era principalmente de tipo verbal, siendo las unidades de análisis fragmentos de texto que tenían algún tipo de significado en sí mismos por aludir a una misma idea.

Para la organización e interpretación de dichas unidades se elaboró un sistema de categorías que fue reformulado a lo largo del proceso, modificando las dimensiones y cambiando y reestructurando las correspondientes categorías con la idea de crear una propuesta que se ajustara lo mejor posible a los datos encontrados. Este proceso de revisión y ajuste se ha prolongado también durante el análisis de los datos de la muestra estudiada y en ningún caso ha pretendido ceñirse en exclusividad a ella (Navarrete, 2004).

El cruce, análisis e interpretación del conjunto de datos disponibles nos permitió caracterizar las dificultades que los alumnos y alumnas del estudio presentaban en sus explicaciones y que podían representar un obstáculo en su evolución. Entre dichas dificultades nos centramos aquí en las de índole matemática.

En todo caso, antes de analizar estas dificultades tal vez convenga discutir las características y estructura del conocimiento que sería deseable acerca de estos temas (Navarrete, 2004; Navarrete, Azcárate y Oliva, 2004).

En efecto, la interpretación adecuada del fenómeno de las estaciones exige una comprensión a diversos niveles. En un nivel más básico, demanda una adecuada conceptualización del funcionamiento del Sistema Solar, lo cual incluye no sólo la disposición espacial de sus elementos (al menos del Sol y de la Tierra), sino también de los tamaños y distancias relativas, de las escalas temporales de los movimientos de traslación y rotación y de la forma de la trayec-

toria terrestre, la cual se describe como una elipse poco excéntrica, con el Sol colocado en un foco que casi coincide con el centro de la eventual circunferencia a la que se aproxima.

En un segundo nivel, la interpretación científica de ese fenómeno debe articularse a partir de, al menos, seis esquemas básicos, a saber:

1. Que los rayos solares pueden considerarse aproximadamente como haces paralelos a su llegada a las Tierra, dado que el diámetro del Sol supone una distancia relativamente muy pequeña con respecto a la distancia Tierra-Sol.

2. Que el mayor o menor ángulo de incidencia de los rayos solares sobre la Tierra es función de la curvatura de ésta, que es próxima a la esfera.

3. Que el efecto térmico de los rayos solares sobre la superficie terrestre depende del ángulo de inclinación de los rayos sobre la misma, idea que, si bien puede entenderse cualitativamente a través de ejemplos y analogías, exige en rigor la comprensión del concepto de flujo de radiación como magnitud física.

4. Como consecuencia de 2 y 3, que dicho efecto térmico va a variar en función de la latitud terrestre, debido precisamente al efecto de su curvatura.

5. Que el efecto térmico sobre una latitud determinada varía de una época a otra del año, debido a que el eje de rotación de la Tierra no es perpendicular a la trayectoria terrestre alrededor del Sol y gracias a que la orientación de dicho eje permanece, es decir, es prácticamente constante a lo largo de su traslación.

6. Que como consecuencia de lo anterior, las estaciones se repiten periódicamente de forma anual para una latitud determinada (del hemisferio norte/del hemisferio sur) siguiendo la secuencia V/I, O/P, I/V, P/O, V/I¹ y así sucesivamente.

Es evidente que la articulación de todas estas ideas en un modelo único no es un proceso sencillo, por lo que, en sí mismos, estos contenidos muestran ya una dificultad intrínseca que no deberíamos subestimar (Parker y Heywood,

1998). De hecho, la construcción del modelo cosmológico Sol-Tierra-Luna ha sido un proceso lento y tortuoso a lo largo de la historia de la ciencia, como todos sabemos, escribiendo una de las páginas más dramáticas de la construcción del conocimiento científico (Vega, 2001).

Dicha complejidad no es ajena a la estrecha relación que existe entre los conocimientos físicos y matemáticos que intervienen. Por ello, y debido a la situación antes expuesta, es de esperar la aparición de dificultades y problemas específicos a una deficiente contextualización del conocimiento matemático y a una deficiente vinculación con la matemática de los conocimientos físicos abordados.

Algunas dificultades vinculadas con el conocimiento matemático

Una de las grandes dificultades que se evidenció a lo largo del proceso está relacionada con una elaboración no adecuada del conocimiento matemático y con la incapacidad para su aplicación en la explicación y comprensión de situaciones extramatemáticas. Consideramos que éste es un problema de gran incidencia en el ámbito escolar, ya que entendemos que el conocimiento matemático es un instrumento básico para modelizar la realidad, representarla e interpretar las relaciones que en ella se observan.

Así, aparecen significativos problemas a la hora de "aplicar" términos, nociones y procedimientos reconocidos oficialmente como matemáticos a esta realidad concreta (sistema Sol-Tierra y estaciones), en principio ajena al ámbito académico de las matemáticas (Cuadro 1).

La mayoría de las veces estos problemas de interpretación revelan la existencia de importantes dificultades para la comprensión del fenómeno físico. Algunas de ellas las podemos considerar de naturaleza geométrica, y otras con un sentido más transversal, como la noción de proporcionalidad y la capacidad para operar con ella en la práctica, así como el ma-

¹ V (Verano), I (Invierno), O (Otoño) y P (Primavera).

| DIFICULTADES VINCULADAS AL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO | TEÓRICAS | PRÁCTICAS |
|--|--------------------------|--|
| | De naturaleza geométrica | <ul style="list-style-type: none"> • Empleo no adecuado de términos geométricos. • Nociones de elipse, óvalo, paralelo, perpendicular, oblicuo, tangente, círculo, redondo, circunferencia, esfera, proyección... • Construcción de elipse. |
| | De naturaleza aritmética | <ul style="list-style-type: none"> • Escasa operatividad en el cálculo y en el manejo de unidades. |
| | De visión espacial | <ul style="list-style-type: none"> • Manejo mental de imágenes en el espacio (movimiento de los cuerpos: rotación-traslación). • Representación espacial en el plano (perspectivas). • Interpretación de representaciones espaciales. |
| | De proporcionalidad | <ul style="list-style-type: none"> • Cálculo de proporciones, escalas... • Manejo de modelos a escala. |

Cuadro 1. Dificultades vinculadas al conocimiento matemático.

nejo mental de imágenes en el espacio, lo que tradicionalmente se conoce como “visión espacial”. Por ejemplo, estos últimos conocimientos se han mostrado claves en el desarrollo del modelo explicativo del funcionamiento de las estaciones.

Vamos a referirnos, a continuación, a los distintos tipos de dificultades indicadas.

Empleo no adecuado de términos geométricos

Entre las dificultades de naturaleza geométrica se detectó el empleo arbitrario de ciertos términos geométricos en su comunicación habitual, escrita u oral. El uso de los mismos, sin ningún rigor, evidencia en principio una mala conceptualización de los significantes empleados. Así, ha sido habitual en todos los grupos el empleo de la expresión “*más o menos perpendiculares*” para referirse a un mayor o menor ángulo de incidencia de los rayos solares, con lo que el concepto de “*oblicuo*” quedaba suplantado. En otros momentos, también se han empleado expresiones como “*rayos más o menos directos*” para aludir al ángulo de incidencia. También, el término “*perpendicular*”, para hacer referencia al “*paralelismo*” de los rayos.

Otros términos normalmente utilizados de forma incorrecta han sido: “*circulo*”, “*circular*” o “*redonda*” para designar la forma aproximada de la órbita terrestre a una “*circunferencia*”; también “*elipse*” para denominar una órbita “*ovalada*” (a veces se ha utilizado el término “*elipsis*” en lugar de “*elipse*”); y el de “*redonda*”, para denominar la forma “*esférica*” de la Tierra.

Estas dificultades, a su vez, tienen relación, en mayor o menor medida, con otras que subyacen a problemas de mayor calado como son los de representación e interpretación espacial en el plano, ligadas así mismo con el ámbito matemático; pero también las hay ligadas con ámbitos bien diferentes, como el didáctico.

Sin embargo, debemos decir que las dificultades en relación con el empleo arbitrario de los términos geométricos, en gran medida, se fueron superando a lo largo del proceso. Por ejemplo, respecto al término “*elipse*”, conforme los estudiantes fueron accediendo a su conceptualización, en lugar de atribuírselo a las formas ovoideas o circulares que dibujaban inicialmente, lo utilizaron para designar la figura que correspondía con los parámetros geométricos que implicaba dicho concepto, como se puede apreciar en el comentario recogido en el portafolio del Grupo 1:

(Portf. Grupo 1) «Hemos buscado en el diccionario la definición de elipse y entre ésta, el profesor y lo que opinábamos nosotras hemos llegado a saber lo que es una elipse. Partiendo de lo que es un círculo y lo que es una elipse la hemos diferenciado.

Igual sucedió con el uso del término “perpendicular” y la utilización progresiva del concepto “oblicuo” en lugar de “más o menos perpendicular”. Este hecho concuerda bien con la literatura que ha puesto de manifiesto que los obstáculos y dificultades ligadas al lenguaje suelen ser más fluidas y fáciles de superar (Furió, 1986).

Falta de operatividad en el cálculo

Hemos detectado también problemas de tipo aritmético relacionados con el cálculo numérico, que tienen que ver directamente con la operatividad matemática, pero también, como antes, con actitudes y tendencias metodológicas. Con ello nos referimos a las dificultades mostradas por el uso estimativo de los datos numéricos a través de aproximaciones cualitativas, en vez de realizar las operaciones oportunas (ver Fig. 1, correspondiente al Grupo 7), y, también, por el desprecio por los decimales.

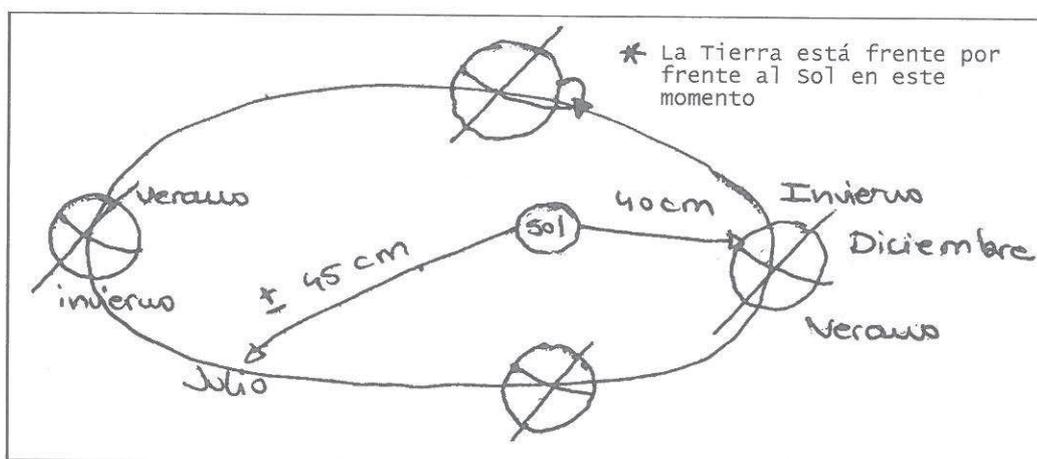


Figura 1

En el dibujo de la figura 1, por ejemplo, se puede observar cómo el grupo que lo realizó sólo aprecia que hay un valor mayor que otro, pero no se percatan de la escasa diferencia que existe entre los dos radiovectores. Determinan erróneamente cuál sería el valor que correspondería al Afelio (45 cm.) y plasman ambos valores, simbólicamente, sobre el dibujo. Resulta muy significativa la diferente magnitud con que representan los segmentos de 40 y 45 cm. El segundo de ellos, que debería de ser muy semejante al primero, es prácticamente el doble del mismo. Además es muy posible que el valor de 45 cm. haya sido estimado a “ojo de buen cubero”, ya que, si hubieran realizado los cálculos oportunos, el valor que deberían haber obtenido es muy inferior a 45 cm., tan sólo de 41’31

cm. El que en el dibujo reflejen “± 45 cm.” parece confirmar la hipótesis de que no se trata de un error de cálculo matemático sino de apreciación estimativa.

Así mismo, se han detectado algunos errores en cálculos muy sencillos, así como dificultades al operar con diferentes unidades o al cambiar de escala. En otras ocasiones, los cálculos matemáticos han sido correctos, sin embargo, por la forma en que se han expuesto revelan el sometimiento que aún mantienen a procedimientos o rutinas formales de cálculo muy infantiles. Esta falta de independencia respecto de las consignas escolares tradicionales, y de “agilidad” operativa, impiden que las necesidades requeridas por el proceso sean provistas de forma adecuada.

Los problemas con la distancia, la forma de la órbita y la elipse

Las ideas o concepciones que subyacen en quienes se apoyan en la idea de distancia para explicar la existencia de las estaciones, y que hemos englobado bajo el término coloquial de “*metáfora de la estufa*” (Navarrete, 1998; Navarrete, Azcárate y Oliva, 2004), han constituido uno de los principales obstáculos detectados en el proceso de elaboración de una explicación coherente sobre las estaciones terrestres. Se trata de una concepción muy predominante detectada en cinco de los seis grupos analizados (en todos menos en el Grupo 8, en el que no existen suficientes datos como para poder afirmarlo con rotundidad).

Las ideas implícitas que soportan las explicaciones basadas en la consideración de la idea de distancia provienen fundamentalmente de la experiencia cotidiana de los sujetos en su inte-

racción con el medio, y son el resultado de la aplicación de principios causales simples a la explicación de los hechos (García, 1995; Pozo y Gómez-Crespo, 1998). Así, las experiencias sensitivas percibidas al acercarse o alejarse de un foco calorífico (fuego, bombilla, vela, estufa) constituyen para ellos una analogía que les induce a aplicar espontáneamente este modelo para justificar las estaciones.

Hemos podido constatar cómo esta concepción implícita e incuestionada está dotada de una gran estabilidad, y ante la nueva información actúa como un filtro inconsciente que sólo deja ver parte de ésta, aquella que es coherente consigo misma, la cual es asumida e incorporada automáticamente; y ante la que no lo es, se actúa modificándola hasta conseguir que se asimile a ella. La imagen que recoge la Fig. 2, de la representación realizada en el Grupo 3, es buena muestra de ello.

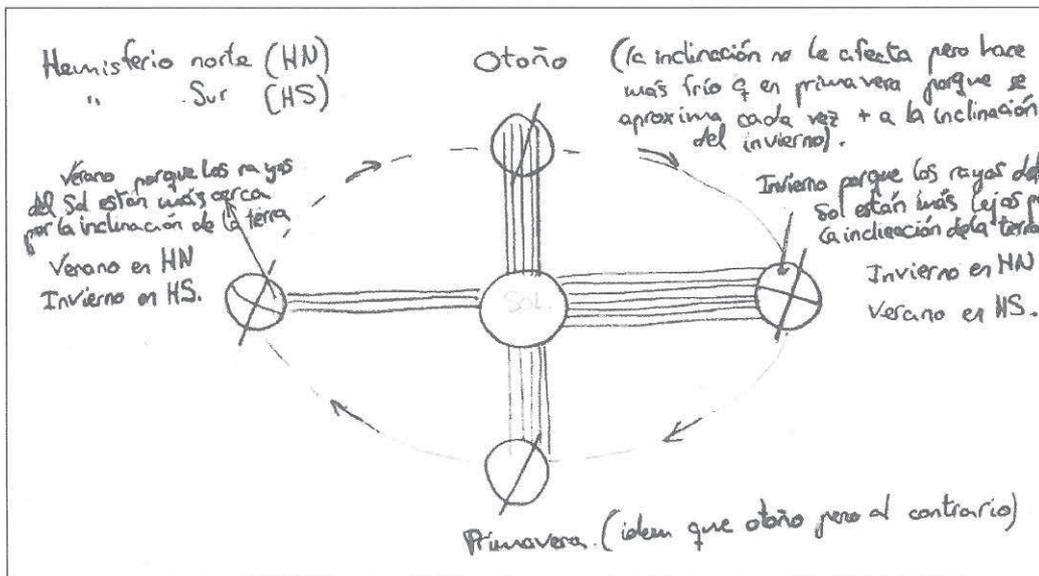


Figura 2

En el dibujo se indica que gracias a la inclinación del eje en las posiciones características de Invierno/Verano y Verano/Invierno, los rayos del Sol están más lejos para el hemisferio donde se da el invierno y más cerca para el hemisferio en el que se produce el verano.

Veamos ahora la relación que se establece entre la concepción implícita de “*distancia*” y la expresión gráfica de la órbita terrestre. La concepción de la “*metáfora de la estufa*” ha sido detectada, entre otros esquemas gráficos, en aquellos que representaban una órbita terrestre

ovoide alargada (ya estuviera directamente dibujada, caso más frecuente, o se dedujera por la disposición de las figuras). Creemos que esta concepción, implícita en la mente de los alumnos, actuó de manera inconsciente ante el dibujo clásico del libro de texto, seleccionando aquella información que en apariencia coincidía con sus presupuestos y/o modificando aquella otra que no lo hacía. Así, la órbita elíptica con un Sol ligeramente descentrado (o no tan ligeramente descentrado) (Vega, 2001) les servía de soporte idóneo para su modelo personal de “*distancia*”, por lo cual debió incorporarse sin problema alguno a su concepción original. De esta forma la concepción inicial se vio reforzada tácitamente por esta lectura particular de la información suministrada por la escuela, lo que dio como resultado una mayor estabilidad al modelo al recibir implícitamente el respaldo del conocimiento escolar.

Pero no queda ahí la cosa, sino que la forma de la órbita está asociada al concepto de elipse y la caracterización de dicho concepto geométrico ha tenido una clara influencia en el proceso explicativo. A los problemas ya enunciados hay que añadir el de la conceptualización intuitiva de elipse, presente en todos los grupos, al identificarla con la forma ovoide alargada de la órbita terrestre que perciben de los dibujos de los libros de texto. Al no tener desarrollada la habilidad para el manejo mental de imágenes en el espacio, ni para la proyección en perspectiva en el plano de figuras tridimensionales (problemas que analizaremos más adelante), lógicamente no son capaces de identificar la perspectiva con la que ha sido realizado el dibujo del texto. Por tanto, al recibir la información adicional escolar de que la órbita terrestre es elíptica, identifican dicha figura geométrica con la imagen que visualmente perciben.

A partir de entonces, para ellos todas las elipses son formas ovales alargadas. A todo ello se añade que la mayoría de los textos suelen exaltar la naturaleza elíptica de las trayectorias celestes al estudiar las leyes de Kepler, dibujando elipses extraordinariamente excéntricas; más propias de las que describen los cometas que de las que siguen los cuerpos planetarios. Ello

constituye una prueba más de las carencias exhibidas por muchos de los textos escolares, en los cuales es frecuente que aparezcan dibujos y gráficos con fines fundamentalmente decorativos y con notables incoherencias y deficiencias (Perales y Jiménez, 2002).

Según esto, queda suficientemente claro que la información que aporta la escuela en los primeros niveles de enseñanza sobre la forma elíptica de la órbita terrestre (sobre todo por la dificultad añadida que tiene para su representación gráfica) tiene una incidencia negativa en las concepciones de los alumnos. A. M. Vega (2001) también hace referencia a este problema, al que denomina eufemísticamente “*el hechizo de la elipse*”.

Durante el proceso formativo se utilizaron diferentes estrategias para hacer reflexionar a los estudiantes e intentar desestabilizar su idea implícita de elipse para hacerla evolucionar hacia el concepto geométrico adecuado. De entrada hay que decir que nadie tenía una conceptualización minimamente adecuada sobre la figura geométrica de la elipse.

Ante la aportación de datos sobre el Perihelio y el Afelio (las fechas en que se producían y el valor numérico de la distancia Tierra-Sol en ambos momentos, Perihelio: 147.265.000 km. y Afelio: 152.095.000 km.), o bien no se sabían interpretar o no se tenía en cuenta la escasa diferencia cuantitativa entre ambas distancias. La apreciación cualitativa de las distancias les llevó a detectar tan sólo el mayor valor relativo del Afelio respecto al Perihelio, y el momento en que se producían. En consecuencia, desplazaron el Sol considerablemente hacia el extremo donde se situaba el invierno en el Hemisferio Norte. Un grupo (Grupo 1), que ya se había aproximado al concepto de elipse, pero que aún no la había construido a escala, también hacía una lectura cualitativa de dichos datos y decidía, sin más argumentación, que la elipse debía de ser casi “redonda”.

Ante el cuestionamiento directo sobre la elipse (sus posibles formas, concepto...) o la solicitud de su construcción por parte del profesor, cuatro grupos optan por buscar la definición en el diccionario. Dos de ellos (Grupo 1 y

Grupo 5), por ejemplo, no saben interpretar el mensaje allí expresado y solicitan ayuda. Otros dos (Grupo 3 y Grupo 8), después de la lectura realizan el dibujo de una elipse muy *sui generis* que circunscribe a dos circunferencias con iguales radios, tangentes entre sí, en cuyo punto de contacto sitúan el Sol (ver Fig. 3, correspondiente al Grupo 8).

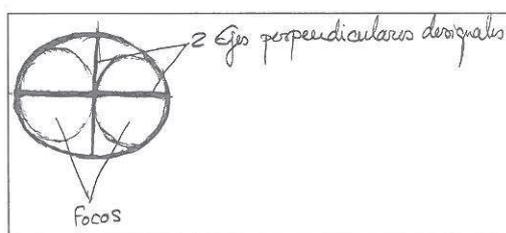


Figura 3

En el caso del Grupo 8, sus problemas en relación con la órbita quedan indicados en su portafolio.

(Portaf. Grupo 8) «DUDAS: *¿Se encuentra el Sol en el centro de la elipse? *¿Es una elipse lo que dibuja la Tierra alrededor del Sol? ¿O es un círculo? ¿Por qué?»

Así como su decisión de iniciar el proceso de búsqueda de información y la posterior interpretación que hacen de la definición encontrada (Fig. 3).

(Portaf. Grupo 8) «Diccionario: lugar geométrico de los puntos de un plano cuya suma de distancias a otros dos fijos, llamados focos es constante. Es una curva cerrada y plana que tiene dos ejes perpendiculares desiguales y figura de óvalo.»

Los centros de cada una de las circunferencias, a los que denominan “focos”, están contenidos en un eje horizontal, que es cortado ortogonalmente por otro eje menor, justo en el centro, en el lugar de tangencia de las dos circunferencias. Entendemos que este dibujo es fruto de la intuición, y de una lectura muy particular del contenido de la definición hecha desde sus propias concepciones.

Es curioso el papel que tiene el conocimiento matemático en el conjunto de ideas de que disponen los estudiantes. Detectamos que existe un cierto “embelesamiento matemático” (permítá-

senos la expresión) desde el momento en que se introduce el término elipse y la actividad se deriva hacia la conceptualización y construcción a escala de esta figura geométrica. Desde ese momento se olvida, en cierta manera, el origen del problema. Al parecer, esta actividad es considerada por ellos como un problema geométrico ligado al ámbito de las matemáticas. Lo que inconscientemente activa una serie de mecanismos de resolución específicos de esta materia. Al centrarse en este cometido particular, parecen olvidar el objetivo principal del estudio que lo desencadenó, y, cuando al fin consiguen resolver el “enigma” geométrico de la elipse, se encuentran con la dificultad de no saberlo aplicar a la resolución del problema que lo motivó, es decir, al modelo orbital de la Tierra alrededor del Sol.

Sin duda, estamos ante un obstáculo significativo consistente en el tratamiento aislado de los hechos, cuestiones y problemas, y la consiguiente limitación para extrapolar los resultados al modelo global.

El problema de la visión espacial y la representación en el plano

En el conjunto de la información gráfica obtenida hemos encontrado grandes deficiencias en las representaciones que sobre el papel han realizado los diferentes grupos. En sus primeros esquemas gráficos, además de las manifestaciones imprecisiones de proyección sobre el plano, se percibía la ausencia de elementos concretos de la realidad representada (eje, ecuador, órbita, simultaneidad de estaciones, trópicos, etc.), y de algunas de las relaciones necesarias entre ellos para explicar el fenómeno de las estaciones.

Estas ausencias podrían, en principio, achacarse al desconocimiento conceptual de dichos elementos y de sus relaciones mutuas. No obstante, este estudio nos sugiere que es imposible disociar la visión espacial y las habilidades para la representación del resto de conocimientos implicados.

En varias ocasiones, se ha evidenciado la disfunción existente entre las representaciones tridimensionales y las proyecciones sobre el plano.

Así, después de “visionar” el fenómeno a través de la modelización con los recursos físicos disponibles, no conseguían representarlo de forma coherente sobre el papel. Por ejemplo, cuando intentaban representar las posiciones equinociales (Fig. 4, representación del Grupo 11).

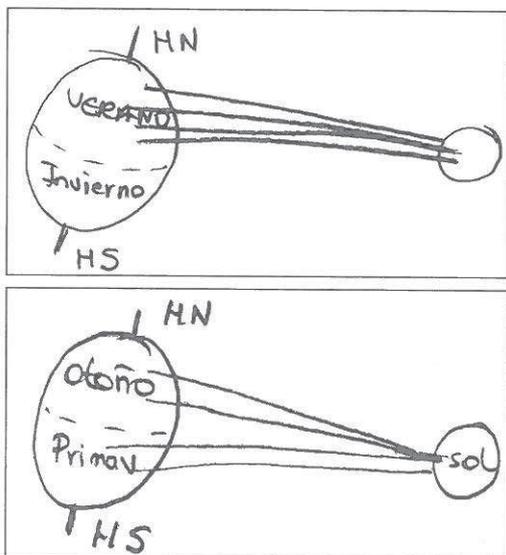


Figura 4

Así mismo, ello se hace patente a la hora de representar en perspectiva el ángulo de inclinación del eje terrestre respecto al plano de la eclíptica y en algún caso en relación con los trópicos (Fig. 5, representación del Grupo 7).



Figura 5

También encontramos algunas proyecciones azimutales realizadas incluso después de haber estado trabajando con el aro hula-hop en las

que se intenta expresar la diferente cantidad de luz que recibe el hemisferio norte en las diferentes estaciones, como la reflejada en la Fig.6, (representación realizada por el Grupo 1).

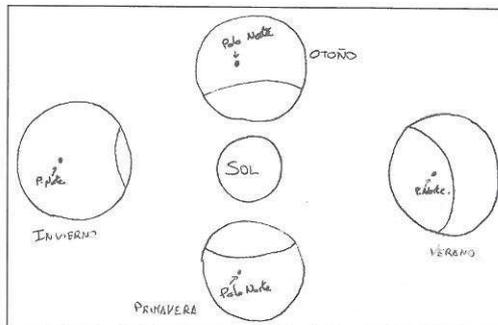


Figura 6

Conforme fue avanzando el proceso y se iba abordando el estudio de los diferentes aspectos concretos, se fue percibiendo con mayor claridad que los problemas de representación en el plano constituían una traba importante que dificultaba la elaboración de dichos conocimientos. El bajo dominio de la representación se apreció desde el principio ya que mostraban reticencias a emplear la expresión gráfica para responder al cuestionario inicial, en el que se le solicitaban dichas representaciones. Durante el proceso siguieron mostrando dichas resistencias; incluso el empleo de modelos tridimensionales, que les permitían representar y “visionar” la realidad, no evitó los consiguientes problemas cuando debieron trasladar estas representaciones espaciales al plano del papel.

Estos conocimientos matemáticos “transversales” están a su vez íntimamente ligados con otros del mismo ámbito, como es el relativo a la proporcionalidad y, en relación con ella, al concepto de escala y el uso de la misma. En este sentido hemos encontrado escollos importantes que dificultaban la elaboración de un modelo más acorde con la realidad que intentaban explicar.

El problema de la proporcionalidad y el uso de escalas

Nos referimos por ejemplo al desconocimiento del tamaño relativo de Sol respecto a la

150

Tierra. Como se ha puesto de manifiesto durante el análisis de los datos, los grupos se quedaron muy sorprendidos cuando al reproducir a escala los tamaños de ambos cuerpos descubrieron que el Sol era mayor que la Tierra. El que lo fuera 109 veces y que para una Tierra de 1 mm., el Sol de 10,9 cm. estuviera situado a 11,7 metros, sorprendió a la totalidad de los grupos. Estos descubrimientos les revelaron que el modelo Sol-Tierra-Luna es irrepresentable a escala en el papel, cuestión totalmente impensable para ninguno de ellos.

Este hecho, y algunos otros ya citados en apartados anteriores, como la tendencia al uso estimativo de los datos (ya indicado en el caso del Grupo 4), demuestran el escaso empleo que los estudiantes han hecho de la escala y de la proporcionalidad durante su proceso formativo. Esto se corresponde con la costumbre, tan extendida en los libros de texto y en el uso de la pizarra por parte de los profesores, de representar modelos analógicos bidimensionales de la realidad en los que no se hace ninguna referencia a los tamaños ni a las escalas. En este caso no sólo nos referimos a la representación del sistema Sol-Tierra, sino al resto de dibujos tan característicos de los textos escolares como la célula, el átomo, los cromosomas, el universo, etc. En ocasiones, incluso, se llegan a utilizar en clase modelos analógicos tridimensionales, pero generalmente sin prestarle la debida atención a las proporciones y escalas a las que se han construido. Ello lleva a muchos alumnos a ignorar que los modelos no son más que un instrumento para interpretar y comprender la realidad y no una copia de la misma (Harrison y Treagust, 2000).

Tampoco es habitual que, en general, se recurra a cierta variedad de modelos diferentes para representar el mismo fenómeno. Sin duda, esto puede suponer un serio handicap para la adquisición de una visión global y completa del fenómeno, ya que cada modelo analógico por separado no puede ilustrar más allá de una pequeña fracción de lo que se desea representar (Harrison y Treagust, 2000; Oliva et al., 2001). Por último, hay que señalar que el profesorado suele recurrir a los modelos concibiéndolos co-

mo un conjunto de hechos estáticos y ya acabados, sin involucrar a los alumnos en su proceso de construcción (Van Driel y Verloop, 1999; Oliva, 2003).

Lógicamente, para acceder a la interpretación adecuada de las representaciones gráficas sobre el plano, se hace imprescindible haber desarrollado previamente estrategias de modelización en tres dimensiones. Tal como apuntan Parker y Heywood (1998), un impedimento importante en la elaboración de este conocimiento es la dificultad que tienen los alumnos para interpretar las representaciones planas que se utilizan en los libros y en las explicaciones del profesor referidas a lo que sucede en un espacio de tres dimensiones. Lo cual se corresponde con el escaso desarrollo de la visión espacial que tienen, es decir, con su escasa habilidad para imaginar los fenómenos y sus variaciones al tener en cuenta la posición del observador y la de los objetos observados.

Por todo lo expuesto, estamos convencidos de que el acceso a la construcción de un modelo sobre las estaciones, próximo al científico-escolar, pasa por el desarrollo de los conceptos espaciales adecuados, de las proporciones y también de las habilidades mentales para su representación tridimensional y su proyección en perspectiva sobre el plano. Sin lugar a dudas, por lo sucedido durante esta experiencia, pensamos que la adquisición de dichos conocimientos, requiere no sólo de los recursos y la metodología conveniente, sino también del tiempo necesario. Y si bien los primeros han mostrado su idoneidad, no así el segundo. Por ello pensamos que se requiere de un periodo de tiempo más amplio para lograr los efectos deseados.

Reflexiones finales

Los obstáculos encontrados, que entorpecen la evolución de los modelos explicativos iniciales detectados (Navarrete, Azcárate y Oliva, 2004), se relacionan principalmente con las creencias y principios implícitos de carácter ontológico, epistemológico y de conocimiento de los sujetos estudiados.

Se detectan también dificultades vinculadas al dominio del conocimiento matemático. Así, el empleo arbitrario de la terminología al uso y la confusión respecto a la figura de la elipse, han puesto de manifiesto errores conceptuales que han actuado también como rémoras, de diferente envergadura, dificultando la evolución de los modelos explicativos. La escasa operatividad en el cálculo y en el manejo de unidades son expresión también de algunas limitaciones para el avance. Mención aparte merecen las dificultades de naturaleza matemática relacionadas con el manejo mental de imágenes en el espacio y su representación en perspectiva en el plano; sin olvidar las relacionadas con el cálculo de proporciones y el empleo de escalas. Éstas, en cambio, sí que han sido abordadas por diferentes autores, entre ellos Parker y Heywood (1998).

Muchas de estas dificultades de índole matemática están asociadas también a aspectos didácticos, reflejo de una forma de enseñar que, por ejemplo, incide en la memoria como procedimiento fundamental de aprendizaje. Ello conlleva la supeditación al conocimiento escolar memorizado en contextos escolares. Si a ello le añadimos la organización disciplinar, podemos entender la descontextualización de procedimientos propios de las matemáticas.

En este sentido, uno de los aspectos principales que se deduce de nuestro estudio es el dilema de la conveniencia o no de introducir prematuramente la idea de elipse como forma de las trayectorias orbitales planetarias. Nuestra posición es que una introducción prematura en la escuela de la forma elíptica de la órbita terrestre, tiene una incidencia negativa en las concepciones de los alumnos, originando el efecto que Vega (2001) denomina como el “*hechizo de la elipse*”, la cual actúa como soporte idóneo de la “*metáfora de la estufa*”. Por ello, creemos conveniente que se posponga temporalmente dicha información hacia niveles escolares superiores, una vez construidos los conocimientos matemáticos necesarios para interpretar de forma significativa toda la carga conceptual que acarrea esa información. Dado que la órbita terrestre, aun siendo elíptica, es muy próxima a una circunferencia, nos parece más

adecuado para los niveles iniciales en que se aborda este contenido emplear expresiones del tipo: “casi como...”, “parecida a...” “semejante a...” una circunferencia, como manera de describir la forma de la órbita terrestre.

A modo de conclusión final, los resultados obtenidos nos informan sobre la necesidad de cambiar la organización curricular desde su propia base. Es necesario plantar alternativas que nos permitan acceder al conocimiento desde posiciones más complejas, no atadas a los campos disciplinares, que nos aporten una visión complementaria de la realidad y que favorezcan la elaboración de sistemas de ideas interrelacionados y sin fronteras fijas entre ellas. Ello implica cambiar la formación de los niños desde los primeros años escolares y de los maestros en nuestras Facultades de Educación (Azcárate y Cardeñoso, 1998), aportando desde nuestros campos didácticos visiones más de tipo interfase e integradoras y no tan vinculadas con los conocimientos del ámbito científico que nos sirve como referente a la hora de caracterizar nuestro campo de actuación.

Es difícil de entender una formación en el campo de la profesión docente desde campos disciplinares separados, pues dicha separación dificulta una formación integradora del maestro y obstaculiza la detección de los problemas de comprensión subyacentes en las explicaciones de los niños al respecto. Éste es el caso, por ejemplo, de lo que acontece ante el fenómeno de las estaciones cuando es analizado desde perspectivas disciplinares aisladas entre sí.

REFERENCIAS

- AZCÁRATE, P. (1999). El conocimiento profesional: naturaleza, fuentes, organización y desarrollo. *Cuadrante*, 8, 111-138.
- AZCÁRATE, P. y CARDEÑOSO, J. M^a (1998). La formación inicial de profesores de matemáticas, finalidades, limitaciones y obstáculos. *Investigación en la Escuela*, 35, 75-85.
- FURIÓ, C. (1986). Metodologías utilizadas en la detección de dificultades y esquemas concep-

- tuales en la enseñanza de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 4 (1), 73-77.
- GARCÍA, J. E. (1995). La transición desde un pensamiento simple hacia un pensamiento complejo en la construcción del conocimiento escolar. *Investigación en la Escuela*, 27, 7-20.
- GARCÍA, F. E.; PORLÁN, R.; RIVERO, A. y BALLELLA, F. (2001). Red para la investigación y renovación escolar (Red-IRES, España). En R. Porlán, A. Flores y M. D. Arias, *Redes de maestros: una alternativa para la transformación escolar*. Sevilla, Díada.
- HARRISON, A. G. y TREAGUST, D. F. (2000). A typology of school science models. *International Journal of Science Education*, 22 (9), 1011-1026.
- NAVARRATE, A. (1998). Una experiencia de aprendizaje sobre los movimientos relativos del sistema "Sol/Tierra/Luna" en el contexto de la formación inicial de maestros. *Investigación en la Escuela*, 35, 5-20.
- NAVARRETE, A. (2004). *Obstáculos y dificultades en la evolución de las estructuras conceptuales y epistemológicas de los futuros maestros: Un estudio de casos sobre el fenómeno de las estaciones*. Tesis doctoral dirigida por los Dres. Pilar Azcárate y José M^a Oliva. Universidad de Cádiz, Facultad de Ciencias de la Educación. Publicada por ProQuest ISBN: 84.7786-285-0, UMI, nº 3107335.
- NAVARRETE, A.; AZCÁRATE, P. y OLIVA, J. M^a (2001). La formación inicial del profesorado de secundaria: la enseñanza de las áreas curriculares. *Actas del Congreso Nacional de Didácticas Específicas*. Granada, España. Vol. II, 1503-1514.
- NAVARRETE, A.; AZCÁRATE, P. y OLIVA, J. M^a (2004). Algunas interpretaciones sobre el fenómeno de las estaciones en niños, estudiantes y adultos: revisión de la literatura. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias* Vol. 1 (3), 146-166
- OLIVA, J. M^a (2003). Rutinas y guiones del profesorado de ciencias ante el uso de analogías como recurso de aula [en línea]. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 2 (1). En: <http://www.saum.uvigo.es/reec>.
- OLIVA, J. M^a; ARAGÓN, M^a M.; MATEO, J. y BONAT, M. (2001). Una propuesta didáctica, basada en la investigación, para el uso de analogías en la enseñanza de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3), 453-470.
- PARKER, J. y HEYWOOD, D. (1998). The earth and beyond: developing of primary teachers' understanding of basical astronomical events. *International Journal Of Science Education*, 20 (5), 503-520.
- PERALES, F. J. y JIMÉNEZ, J. D. (2002). Las ilustraciones en la enseñanza-aprendizaje de las ciencias. Análisis de libros de texto. *Enseñanza de las Ciencias*, 20(3), 369-386.
- PORLÁN, R. (1994). *Constructivismo y escuela. Hacia un modelo de enseñanza-aprendizaje basado en la investigación*. Sevilla: Díada.
- PORLÁN, R.; AZCÁRATE, P.; MARTÍN DEL POZO, R.; MARTÍN TOSCANO, J. y RIVERO, A. (1996). Conocimiento profesional deseable y profesores innovadores: fundamentos y principios formativos. *Investigación en la Escuela*, 29, 23-38.
- POZO, J. I. y GÓMEZ CRESPO, M. A. (1998). *Aprender y enseñar ciencia*. Madrid: Morata.
- RODRÍGUEZ, G.; GIL FLORES, J. y GARCÍA, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Aljibe.
- STAKE, R. E. (1994). Case Studies. En N. K. Denzin e Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research*. Okas, CA: Sage Publications, 236-247.
- VAN DRIEL, J. H. y VERLOOP, N. (1999). Teachers' knowledge of models and modelling in science. *International Journal of Science Education*, 21(1), 1141-1153.
- VEGA, A. M. (2001). *Sol y Luna, una pareja precepernicana. Estudio del día y la noche en Educación Infantil*. Tesis doctoral dirigida por el Dr. F. Javier Marrero. Universidad de la Laguna, Centro Superior de Educación.

SUMMARY

This article gathers up the information coming from a research on the explanatory models on the phenomenon of seasons by a group of Primary pre-service teachers. The reflection is centred on one of the aspects that have turned out to be more significant: the influence of the mathematical knowledge in the understanding and application of the models. We can observe how an inadequate elaboration and understanding of the mathematician notions can become an important obstacle in the elaboration of appropriate explanatory models of the seasons phenomenon.

KEY WORDS: *Specific Didactics; Mathematical Knowledge; Conceptions on Earth Seasons; Teacher Training*

RÉSUMÉ

Cet article recueille les renseignements obtenus d'un travail de recherche sur les modèles explicatifs du phénomène des saisons terrestres qui ont été employés par un groupe de futurs maîtres d'école. La réflexion se centre sur l'un des aspects qui a été plus significatifs: l'influence de la connaissance en mathématiques sur la compréhension du modèle et de son application. On a pu constater qu'une compréhension et une élaboration déficientes des notions mathématiques peuvent devenir un important obstacle à l'élaboration de modèles explicatifs adéquats du phénomène des saisons.

MOTS CLÉ: *Didactiques spécifiques; Connaissance mathématique; Représentations sur les saisons de la Terre; Formation de professeurs.*