

Este artículo supone una reflexión sobre el proceso de ejemplificación en matemáticas, consecuencia de una investigación cuya intención fue estudiar cómo cuatro profesores sin experiencia docente ponían de relieve características comunes en el proceso de enseñanza del concepto de función.

Para ello, recogimos y analizamos los ejemplos utilizados por los cuatro estudiantes para profesor y, a través de esos ejemplos, pudimos describir algunos aspectos vinculados a su conocimiento didáctico del contenido en ese ámbito conceptual. El esquema seguido puede ser útil para ser desarrollado en otros ámbitos de las matemáticas escolares, pero, sobre todo, permite desvelar algunas variables en la evolución del proceso de ejemplificación.

PALABRAS CLAVE: *Conocimiento Didáctico del Contenido; Formación Profesorado Novel; Proceso Ejemplificación en Matemáticas.*

La ejemplificación del concepto de función en estudiantes para profesores de Matemáticas en Secundaria

pp. 53-67

Carlos A. Figueiredo
Lorenzo J. Blanco
Luis C. Contreras

Escuela Secundaria de Elvas (Portugal)
Universidad de Extremadura
Universidad de Huelva

Presentando el problema

“Por ejemplo” es una expresión que encierra mucho del espíritu de la investigación que hemos desarrollado (Figueiredo, 2005). Es una expresión que todo profesor de matemáticas usa innumerables veces todos los días. Lo que atrae en esta expresión es, realmente, lo que viene a continuación de ella y en qué contextos son pronunciadas estas dos palabras:

– A través de la ejemplificación se promueve en el alumno la construcción de la estructura mental del concepto.

– Por la ejemplificación utilizada puede conjeturarse el conocimiento didáctico del contenido (Marcelo 1993) en un profesor.

En relación con la primera afirmación, usamos el término “ejemplo” para referirnos a un amplio espectro de elementos matemáticos tales como ilustraciones de conceptos, técnicas de demostración, problemas, objetos matemáticos que satisfacen una condición dada, etc. (Watson y Mason, 2002). Podemos distinguir entre dos grandes clases de ejemplos: los esencialmente inductivos, aquellos que apuntan para algo más general, y que son

* Escuela Secundaria D. Sancho II de Elvas, 7350 Elvas, Portugal. carlosaafigueiredo@sapo.pt

** Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas, Universidad de Extremadura, Badajoz. Avenida de Elvas s/n, 06071 Badajoz. lblanco@unex.es

*** Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía, Universidad de Huelva. Campus El Carmen. Avenida de las Fuerzas Armadas s/n, 21071 Huelva. lcarlos@uhu.es

✉ Artículo recibido el 2 de octubre de 2006 y aceptado en diciembre de 2006.

particularidades de una generalidad. Usamos estos ejemplos para *personificar*, o *materializar*, conceptos abstractos y mostrar procedimientos generales, su uso es una práctica pedagógica muy común que facilita la abstracción por parte del alumno; por otro lado tenemos otros ejemplos, aquellos a los que llamamos ejercicios, no son inductivos, antes cumplen un papel ilustrativo y están orientados para la actividad práctica del alumno (Rowland, Thwaites y Huckstep, 2003).

La segunda afirmación puede ser soportada por la forma en que utilizamos la ejemplificación. Usando las dos clases de ejemplos descritos, la selección de los ejemplos por parte de los profesores no es trivial ni arbitraria, la forma de dificultad gradual y creciente es generalmente bien comprendida, de esta manera, el éxito experimentado por los alumnos a través de ejemplos rutinarios los prepara para enfrentar otros más desafiantes (Rowland, Thwaites y Huckstep, 2003). Además de esto, la utilización de ejemplos puede ser o no acertada, promover o no buenos aprendizajes. Por tanto, estamos interesados en crear buenas relaciones entre el lenguaje y la comprensión activa, esto es, relaciones que son efectivas para dirigir a los alumnos hacia formas útiles de comprender las matemáticas (Watson y Mason, 2002) a través de los ejemplos que el profesor utiliza.

La necesidad del uso de ejemplos nos parece obvia pues resulta difícil que los alumnos puedan aprender sobre la base exclusiva de las definiciones; los ejemplos y contra-ejemplos son los que ayudan a entender y matizar las definiciones de los conceptos (Orton, 1990). Esta necesidad traduce, en parte, lo que en las aulas de cualquier profesor de matemáticas ocupa una sustancial parte del tiempo disponible. Uno de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas es la transmisión de contenidos programáticos estipulados. La necesidad de introducir, modificar y desarrollar una estructura conceptual en el alumno obliga a que se modifique nuestra propia estructura del concepto. A medida que

controlamos las perspectivas del concepto, más capacitados estamos para poder transmitir (de formas diversas, si es necesario) el concepto en cuestión. En el fondo, es este proceso enseñanza/reflexión/enseñanza, al que nos obligamos, el que mejora nuestra propia práctica y enriquece la forma en que conseguimos manipular un concepto. Cada concepto puede ser definido de diferentes maneras. Disponer de una gran variedad de definiciones equivalentes colabora en la resolución de problemas donde el concepto está inserto (Calvo y Azcárate, 2001). De esta manera, también la ejemplificación será tanto más eficaz cuanto más variada sea la forma de enfocar y abordar el concepto.

Lo anteriormente expuesto se acepta fácilmente si tenemos en cuenta la sensación que todos los profesores asumimos de que conocemos, tenemos nuestras propias perspectivas y tratamos mejor los conceptos que ya hemos enseñado o que enseñamos más frecuentemente. Esto es, se ejemplifica mejor cuanto mejor se controla el concepto (y viceversa) y más diversificados sean los posibles enfoques de ese concepto. Siendo así, más que la transmisión de contenidos, debemos transmitir conceptos, esquemas cognitivos y aplicaciones para que las matemáticas tengan sentido y, en último análisis, se puedan volver útiles.

La ejemplificación encierra en sí mismo las dos caras de la misma moneda. Por un lado tiene un papel esclarecedor, pero, si es deficiente, puede crear problemas graves de errores de concepto, concepciones alternativas, obstáculos cognitivos, etc. Siendo así, no es extraño que la forma de transmisión de conocimientos sea, por parte del profesor, un proceso que requiere todo el cuidado.

Objetivos de nuestro estudio

Desde la perspectiva antes expuesta, realizamos una investigación que tenía como objetivos ¹:

¹ Los dos primeros objetivos están adaptados al concepto de función pero podrían adaptarse a otro cualquiera. El concepto de función fue escogido por cuestiones de calendario, era aquel que, en la programación, aparece en el segundo trimestre del curso.

- Estudiar las especificidades de los ejemplos y relacionarlas con el concepto de función.
- Observar el papel de los ejemplos en el proceso de enseñanza/aprendizaje del concepto de Función durante el año de Prácticas Pedagógicas de cuatro profesores en prácticas.
- Estudiar, con la ejemplificación utilizada, la existencia de patrones en el Conocimiento Didáctico del Contenido de cuatro profesores durante el tiempo de Prácticas Pedagógicas.
- Aportar algunas sugerencias sobre el uso de la ejemplificación en el aula.

Los fundamentos del estudio

La necesidad de dar un sentido preciso al término concepto ya se muestra evidente en los trabajos de Skemp (1971), donde el autor se encarga de definir y aclarar ambigüedades en el sentido de los términos por él utilizados cuando explica cómo los individuos construyen conceptos en general y, en particular, cómo construyen conceptos matemáticos. Siguiendo al autor, consideramos los conceptos como adaptaciones a estructuras conceptuales llamadas esquemas; un concepto es un objeto puramente mental y requiere, para su formación, un cierto número de experiencias que tienen algo en común y que, por abstracción, tomamos conciencia de sus semejanzas (Skemp, 1971).

La adquisición de un esquema conceptual requiere que se unan ciertos significados a la palabra que designa el concepto: imágenes mentales (cualquier clase de representación: forma simbólica, diagrama, gráfico, etc), propiedades, procedimientos y experiencias desarrolladas asociadas al concepto (Azcárate, 1995; 1997).

El esquema conceptual está formado por ejemplos del concepto, no-ejemplos², contraejemplos, procedimientos a él vinculados, recuerdos de experiencias con él, propiedades, etc. (Calvo y Azcárate, 2001). Los atributos

relevantes de un concepto son las características que un objeto debe poseer para poder ser considerado un ejemplo de ese concepto (Wilson, 1990; Calvo y Azcárate, 2001). La metáfora del andamio ilustra de manera precisa el papel de estos términos en la actividad matemática de un individuo. En la construcción de la *imagen de un concepto* la *definición del concepto* tiene el papel equivalente al de un andamio durante la construcción de un edificio pero después de construido el edificio, el andamio puede ser retirado porque el edificio ya no necesita de su auxilio para ser sustentado. Así, el papel de la definición aparece como el soporte para la construcción de la imagen del concepto que, una vez construida, es ella la que se utiliza y ya no requiere el uso de la definición del concepto y, si fuese necesario, podremos siempre ayudarnos de la definición si la imagen del concepto precisase de alguna alteración. Los términos *imagen de un concepto* y *definición del concepto* son términos introducidos por Tall y Vinner (1981).

En la investigación consideramos que la adquisición del concepto se hace según un esquema tan simple como intuitivo y que determinó, en la metodología adoptada, la construcción del sistema de categorías.

55

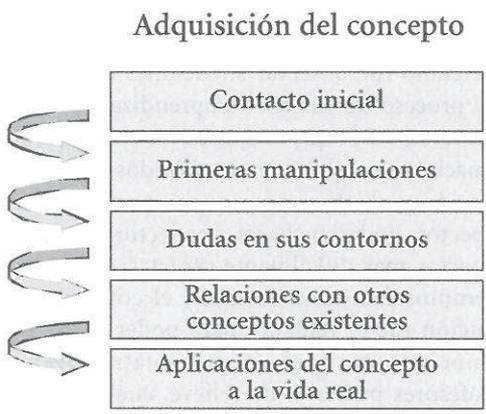


Figura 1: Etapas de la adquisición del concepto.

² Son casos que parecen ejemplos de un concepto pero, en realidad, no lo son: $a_n = \frac{n+4}{2n-10}$ puede parecer un ejemplo de una sucesión, pero no lo es porque le falta el 5º término.

En relación con la ejemplificación conviene reforzar su papel en el objetivo de crear nexos y relaciones entre conceptos matemáticos. Esta perspectiva está incluida en los Principios y Estándares para la educación Matemática: “*El pensamiento matemático envuelve la búsqueda de relaciones y, provocar relaciones construye una comprensión matemática. Sin relaciones los estudiantes tienen que aprender y memorizar demasiados conceptos aislados y capacidades. Con relaciones, los alumnos construyen nuevos aprendizajes basados en conocimientos anteriores*” (NCTM, 2000, 274).

¿Cuál es la importancia real de la definición formal en la ejemplificación? ¿Qué será más importante en la ejemplificación, la definición del concepto o el esquema conceptual del concepto? ¿Cómo nos apropiamos del concepto? ¿Cómo “madura” y se desarrolla?

Metodología del estudio

Nuestra pretensión era estudiar a los sujetos integrados en su medio, observándolos directamente en las aulas mientras desarrollaban su trabajo docente. Consecuentemente, este estudio se integró en el ámbito de un estudio etnográfico y se orientó en una metodología encuadrada en un paradigma cualitativo.

Por los objetivos propuestos, el estudio no se ha hecho sobre los ejemplos en sí. Lo que se pretendió fue observar situaciones específicas del proceso de enseñanza/aprendizaje por vía indirecta, ver lo que nos dicen los ejemplos, las situaciones en que fueron utilizados y con qué función y objetivo, para que, a partir de esos aspectos, podamos hacer una lectura de otros aspectos más difícilmente caracterizables. Los ejemplos fueron la forma, y el concepto de función fue el vehículo para poder mirar los conocimientos iniciales que cuatro jóvenes profesores pusieron de relieve, cuáles fueron las herramientas que su vivencia como estudiantes y la formación académica les proporcionaron y, después de su análisis, reflexionar de forma que pudieran mejorar su *saber hacer* como jóvenes profesores.

La perspectiva es, por tanto, de matiz constructivista y teniendo en cuenta que se promueve que estos profesores se asuman como profesionales reflexivos, racionales, que toman decisiones, emiten pareceres, poseen creencias y generan rutinas propias de su desarrollo profesional (Marcelo, 1987), entendemos la investigación como integrada en el paradigma del pensamiento del profesor. Por todo esto, la investigación que realizamos presenta como principal característica ser un análisis descriptivo e interpretativo.

Se tuvo en consideración una primera opinión de los cuatro profesores en prácticas antes de la creación y utilización de los ejemplos, así como otra después de esos momentos. Como bien sabemos, el análisis y reflexión sobre la práctica es lo que nos permite mejorar y ayudar a mejorar, con base en los tres momentos identificados, a saber: una primera entrevista en septiembre de 2004 en el inicio de las prácticas, la selección de la información sobre los ejemplos durante las prácticas de enseñanza de los contenidos en mayo de 2005 y la segunda entrevista en junio de 2005 al final de las prácticas. El análisis y reflexión entre todos los informantes, a lo largo de todo el proceso, fue una constante y permitió disipar dudas y aclarar pormenores desde el momento en que surgieron.

La figura 2 representa en esquema los pasos que caracterizan la metodología seguida, así como el espacio temporal que la investigación ocupó.

Los informantes

Los protagonistas del estudio fueron cuatro profesores en prácticas; alumnos del 5º año de la Licenciatura en la Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad de Évora (Portugal) que en su último año hacían sus prácticas docentes en un centro escolar acompañados por tres orientadores. Es el orientador del centro quien más coopera con los estudiantes para profesores, quien los acompaña diariamente en el año de prácticas y que fue, en este caso, conductor de la investigación.

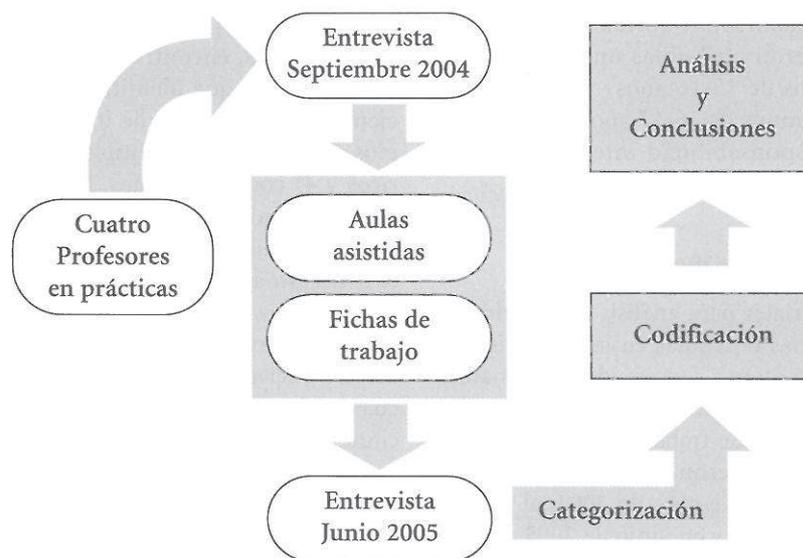


Figura 2: Etapas de la investigación.

En todo momento manifestaron su disponibilidad para integrar el equipo de trabajo que iba a ser constituido, y participar en la investigación. En este artículo enfatizaremos la observación de dos de esos profesores que designaremos, a partir de ahora, con las letras M y S.

M es una profesora en formación de 23 años cuya principal característica es la serenidad en el trato con las personas. La forma suave como trata a los alumnos es muy bien recibida por éstos y su actividad profesional está influenciada por la forma ponderada con que aborda todos los aspectos relativos a su actividad como profesora. M sabe oír y, teniendo ella misma muchas ideas originales, pone en práctica las sugerencias de los compañeros y de sus orientadores consiguiendo una simbiosis entre lo que oye de los otros y lo que piensa por sí misma. Se empeñó todos los días en trabajar lo mejor que pudo y de acuerdo con las solicitudes de los alumnos, encarando su año de prácticas como una oportunidad para iniciar mejor su carrera como profesora.

S tiene 24 años y es una profesora en formación muy intuitiva y espontánea a la que no le gusta preparar sus actividades con demasiada minuciosidad, pero que consigue alcanzar

muy bien los objetivos que se propone. S tiene una característica intrínseca de líder y lideraba, de hecho, el grupo de los cuatro estudiantes que constituían el núcleo de prácticas. Es ella la que exhibe el mejor currículum académico, habiendo estado también en Bulgaria integrada en el programa Erasmus. Como profesora alcanzó sus expectativas y reveló poseer unas capacidades innatas que le permitirán ser una profesional excepcional. Los alumnos se extrañaron, al principio, de su entusiasmo y vitalidad que, después de los primeros contactos, no fue factor de perturbación en las relaciones con ellos si no, por el contrario, de gran empatía. La necesidad de reflexión es una buena característica que tiene pero la utiliza después de los episodios y no antes. Como no le gusta preparar y prevenir prefiere apostar por su instinto, pero destacamos que no deja de reflexionar sobre lo que le llama la atención. Por eso S aprovechó el año de prácticas pedagógicas para ver y reflexionar, no sólo sobre sí sino también sobre los otros compañeros y sobre el orientador a cuyas clases asistía.

Mucho del material recogido es común a las dos profesoras y si las consideraciones sobre ese material son muy semejantes se justifi-

ca por la colaboración normal entre ellas. A ambas le fueron atribuidas una clase de 10º año (alumnos de 15-16 años) y una clase de 11º año (alumnos de 16-17 años), asumiendo ambas la responsabilidad integral ante esas clases.

La selección de los materiales

Los materiales para análisis son de dos tipos: referencias obtenidas en las entrevistas y ejemplos que fueron conseguidos en las aulas observadas (del segundo trimestre) y en las respectivas fichas de trabajo. Las dos profesoras en prácticas fueron entrevistadas en dos momentos, en septiembre de 2004, al principio de las prácticas, y en junio de 2005 cuando éstas terminaron.

Las sesiones de trabajo estaban constituidas por todo el núcleo de prácticas. Los profesores en prácticas fueron observados semanalmente y, normalmente, eran observados por todos los elementos del núcleo: el orientador de la escuela y los otros tres profesores en prácticas. En todas las aulas asistidas fueron recogidos todos los ejemplos propuestos y, posteriormente, fueron utilizados en las sesiones dando origen a las notas de campo.

El Sistema de Categorías

En la bibliografía consultada encontramos algunas clasificaciones de ejemplos y ejercicios.

Blanco (1993) estableció las diferentes actividades relacionadas con la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas en ocho tipos: 1) ejercicios de reconocimiento; 2) ejercicios algorítmicos o de repetición; 3) problemas de traducción simple o compleja; 4) problemas de procesos; 5) problemas sobre situaciones reales; 6) problemas de investigación matemática; 7) problemas de puzzles e 8) historias matemáticas.

Sobre ejemplos, propiamente dichos, existen varios trabajos de Mason y Watson (2001) sobre "Boundary Examples" y Watson y Mason (2004) donde se analizan ejemplos de dificultad y complejidad creciente. Próximo a una

categorización, pero siendo más una separación en clases, encontramos una lista de Michener (1978) que identifica cuatro clases de ejemplos: 1) ejemplos de iniciación; 2) ejemplos de referencia; 3) ejemplos modelo o genéricos y 4) contra-ejemplos. Los primeros funcionan como motivación; los segundos forman, de alguna manera, un inventario, donde el concepto aparece repetidas veces; los terceros generalizan lo que se asume por defecto, esto es, a partir de ese punto un ejemplo modelo se vuelve un ejemplo de referencia; y los cuartos demuestran que determinadas afirmaciones son falsas.

Para estudiar el papel que los ejemplos juegan en la didáctica de las matemáticas Rowland, Thwaites y Huckstep (2003) crearon un sistema de 18 códigos que son atribuidos a 18 aspectos presentados por los ejemplos de estudiantes para profesores de enseñanza primaria. El objetivo era clasificar a los estudiantes por el estudio de los ejemplos buenos o de los ejemplos pobres que ellos presentaron. Aunque no hayan encontrado relaciones directas entre conocimiento matemático y competencias pedagógicas, pudieron, eso sí, aclarar ciertas ligazones entre estos dos conocimientos por la observación de determinados momentos y episodios.

La constitución del sistema de categorías de la investigación fue orientada por un imperativo de simplicidad y por el propio proceso de adquisición de los conceptos de funciones, como vimos en la fundamentación teórica. Para este estudio se optó por un sistema simple y sin subcategorías que, de algún modo, reflejase el proceso adquisitivo del esquema conceptual de función:

La 1ª Categoría es *Definición*: Los ejemplos considerados en esta categoría son aquellos que se presentan a los alumnos inmediatamente después de la definición del concepto, pasando de una situación general, que es la definición, a situaciones concretas de ese concepto. Son pues los primeros ejemplos. De cualquier manera, como alternativa, si fuese esa la selección del profesor, estos primeros ejemplos pueden surgir antes de presentarse la defini-

ción. Esto es, en primer lugar el profesor presenta una serie de ejemplos que manifiestan características comunes; posteriormente, sobre la base de esas características, la definición del concepto surge naturalmente escrita por los alumnos. Al contrario, esta alternativa configura una transición de lo particular para lo general, de situaciones concretas del concepto, los primeros ejemplos, hacia otra situación de carácter más amplio, la definición de ese concepto.

La 2ª Categoría es *Representación*: Una vez introducido el concepto, después de que los alumnos hayan tomado un contacto inicial con él y de haber entendido sus características básicas, surge un segundo momento con los ejercicios típicos o con las primeras situaciones problemáticas del concepto en cuestión. Tanto los ejercicios como las situaciones problemáticas surgen preferentemente cuando el alumno ya se situó en el concepto en el que va a profundizar, es decir, después de la presentación del concepto, y son escogidos sobre la base de criterios personales y de acuerdo con las opciones del profesor.

Una de las diferencias entre estos ejemplos y los de la categoría anterior tiene que ver con el hecho de que la autonomía del alumno en relación al ejemplo deberá ser mayor y el papel del profesor deberá ser menos participante en aras a promover una mayor integración del alumno con el ejercicio o con el problema.

La 3ª Categoría es *Características*: Este tipo de ejemplos surge después de la fase exploratoria del concepto, cuando el alumno emprende la tarea de profundizar en los diferentes aspectos del concepto descubriendo sus particularidades. Construir una estructura o un esquema conceptual es un proceso compuesto de numerosas etapas consecutivas, cada una de ellas con sus dificultades inherentes. En ese proceso las dificultades requieren ejemplos como forma de superar esas dificultades, es decir, como aclarador de las dudas del alumno o como forma de resolver situaciones de confusión.

En el desarrollo de la relación de aprendizaje que se establece entre el alumno y el con-

cepto, los ejemplos de esta categoría son la respuesta a aquellas situaciones de dificultad cuya aparición es esperada por cualquier profesor. No hay temas que sean enseñados sin provocar algún sobresalto a algún alumno en algún momento. Por eso, esas dificultades son esperadas, lo que se sabe es que esas dificultades son de localización temporal indeterminada y de contornos imprecisos. Los profesores con más experiencia pueden tener una facilidad mayor en prevenirlas en comparación con aquellos que iniciaron la tarea docente hace menos tiempo. Los ejemplos dedicados a las situaciones de duda o de confusión pueden presentarse antes de que estas situaciones surjan, pero esa presentación, calidad y profusión dependen de la capacidad de previsión, experiencia y originalidad del profesor.

Como finalidad, estos ejemplos persiguen la correcta construcción de los conceptos y son fundamentales para una progresión segura en el decurso de la enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas y, por eso, son necesarios para abordar cada paso, darle solidez y acautelar situaciones futuras, como puede ser, preparar situaciones más exigentes que surgirán posteriormente.

La 4ª Categoría es *Aplicaciones Internas*: Las aplicaciones internas son una forma de ejemplificación que aparece ya en las fases de mayor profundidad del concepto. Estas aplicaciones pueden incluir contenidos o conceptos enseñados anteriormente o relacionarse con otros que serán enseñados posteriormente. Las situaciones que envuelven este tipo de ejemplos requieren un mayor grado de formación del concepto, una estructura del concepto más compleja por parte de los alumnos, permitiendo la interpretación y el tratamiento de la situación o, en el caso de que el ejemplo sea una situación problema, su resolución.

Los ejemplos de esta categoría surgen como el fin de un trayecto, es el finalizar de una estructura que deberá poseer todas las herramientas necesarias para la aplicación del concepto en cualquier situación estrictamente matemática en que éste figure. Son ejemplos que no integran apenas el concepto en estudio,

ya que el edificio matemático no es una suma de conceptos independientes, más bien una red de conceptos relacionados que se deben articular de forma coherente.

Las situaciones propicias para la presentación de estos ejemplos son los ejercicios que contemplen situaciones nuevas para el alumno o la resolución de problemas estrictamente matemáticos. Son ejemplos que, por su complejidad, no pueden ser presentados oralmente, son presentados en forma escrita para que su análisis se pueda hacer repetidamente si es necesario. El abordaje y tratamiento de los ejemplos incluidos en esta categoría podrán ser a título individual o en grupo, podrán asumir un papel importante en la dinámica que se quiera inculcar en la clase.

La 5ª Categoría es *Aplicaciones Externas*: Estos ejemplos son aplicaciones de la vida real y de otras ciencias. El tipo de ejemplos de esta categoría es semejante a la categoría anterior, apenas difieren en su naturaleza. Son ejemplos que pueden configurar ejercicios o problemas pero se incluyen en esta categoría por manifestar un cierto grado de dificultad. Es exactamente este grado de dificultad lo que los distingue de los ejemplos del mismo género que figuran en las otras categorías. No estamos an-

te situaciones simples, más bien ante situaciones que exigen al alumno un empeño basado en la profundidad y flexibilidad con que se trabajan los diferentes aspectos del concepto, lo que implica una estructura conceptual más compleja.

La codificación y la presentación

Con este sistema de categorías se procedió al análisis de los datos que son constituidos por unidades de análisis. Se definen como “*palabras o conjuntos de ellas procedentes de las respuestas, que tienen significado en relación a sus objetivos en la investigación*” (Barrantes y Blanco, 2004, 245). Las referencias a las categorías que constituyen unidades de análisis fueron encontradas en las entrevistas de septiembre de 2004 y de junio de 2005, en las observaciones de aulas y en las fichas de trabajo.

Las unidades de análisis fueron codificadas según la categoría, el contenido, el material de origen y el profesor que la produjo. El código 2-Ref-240-Ent2-M se lee “2ª categoría – Tipo Referencia – unidad 240 – entrevista junio - ProfesorM”. Los totales de unidades de análisis (referencias y ejemplos) por categorías, de los dos informantes figuran en los cuadros 1 y 2:

Categoría Referencias	Definición	Representación	Características	Aplicaciones Internas	Aplicaciones Externas
Total de M	4	6	10	1	3
Total de S	4	4	8	0	3

Cuadro 1: Total de las referencias en las entrevistas.

Categoría Ejemplos	Definición	Representación	Características	Aplicaciones Internas	Aplicaciones Externas
Total de M	25	49	17	15	10
Total de S	27	37	14	16	11

Cuadro 2: Total de los ejemplos recogidos.

Análisis de los datos

Los datos fueron objeto de un análisis cruzado, fueron analizados por profesor y por categorías. Esto es, se analizaron a los profesores categoría por categoría y, a la vez, cada categoría profesor por profesor. Así pudimos hacer los análisis finales por profesor y finalmente cinco análisis finales por categoría.

Resultados más significativos

Del análisis de cada profesor, categoría por categoría, fue obtenido un análisis integrado de ese profesor y, a su vez, del análisis de cada categoría, profesor por profesor, fueron encontrados los resultados más generales de esa categoría.

De los profesores

La ejemplificación de M

Por la apreciación de los cuadros de M se observa que la distribución de las ocurrencias relativas a las *referencias* no coincide con la distribución de las ocurrencias relativas a los *ejemplos*. Por otro lado M tiene bien claras dos cosas: primera, que los ejemplos son particularizaciones de conceptos (2-Ref-240-Ent2-M: “Una situación concreta.”); y segunda, que sus objetivos son introducir, concretizar, aplicar. Con todo esto, después de la apreciación de los ejemplos, queda confirmada la discrepancia entre la categoría que M considera más importante en las entrevistas y la que M más valoró en términos de trabajo con los alumnos, respectivamente la 3ª y la 2ª.

Dado que M es una profesora con poca experiencia, no sorprende que los ejemplos relativos a la 3ª categoría tengan una frecuencia menor. Son los ejemplos creados inmediatamente después de la presentación de una duda, o antes de que ésta surja, y aquellos que permiten sistematizar y generalizar un concepto. Éstos son los ejemplos más exigentes para la actividad docente y donde la experiencia y el mayor grado de conocimiento didáctico del contenido provocan mejores resultados. Por

eso M necesitó dar mayor énfasis a los ejemplos de la 2ª categoría. M intenta transmitir las características propias del concepto (3ª categoría) utilizando ejemplos de las varias representaciones (2ª categoría), las dudas no serán aclaradas y las sistematizaciones no serán hechas sobre la base de los ejemplos específicos para ese fin, sino por vía indirecta utilizando los ejemplos relativos a las representaciones.

En síntesis, la ejemplificación de M presenta un cierto desfase entre lo que preconiza en las entrevistas y los ejemplos que realmente presentó, o puede presentar. Si por un lado piensa que los ejemplos sirven fundamentalmente para aclarar dudas, resolver situaciones confusas y sistematizar, por otro lado, su *praxis* revela mayor preocupación con el tratamiento básico del concepto y, posteriormente, a su aplicación interna y externa. De cualquier modo también consideraba que los ejemplos muestran la aplicabilidad de las Matemáticas y pueden constituir situaciones problema y ahí, se destaca, que fue de hecho coherente en su trabajo con los alumnos.

La ejemplificación de S

Existen dos características de la ejemplificación de S que sobresalen: el fraccionamiento del proceso de enseñanza y la diferencia en la función del ejemplo en la entrevista y en la práctica diaria.

Este fraccionamiento del proceso de enseñanza/aprendizaje sobresale en las tres primeras categorías y S preconiza la utilización de ejemplos adecuados a la fase de enseñanza donde nos encontremos:

S. “... para aclarar, introducir, consolidar algo, también para explorar nuevos campos. Es decir, en el fondo va a tener... nosotros utilizamos los ejemplos para todo, en cualquier objetivo,

P. ¿para qué? el ejemplo está para servir a todos ellos, ¿no?

S. No se trata de un objetivo en particular, se trata del objetivo que la gente le quiera dar, lo que la gente quiere de él. Si nosotros queremos que la persona alcance este objetivo, el ejemplo está para servir a aquél objetivo.”

La enseñanza de los conceptos raramente aparece de forma integrada, S dice: “Intentar dividir lo que podemos estudiar, podemos estudiar esta parte ahora, esta parte ahora, esta parte ahora, e intentar ligarlas todas al final. . .”.

La presentación de la definición seguida de ejemplos o, de otra forma, ejemplos que determinan un concepto que será después definido, es apenas el inicio del proceso, continuando de esta forma hasta la conclusión del proceso utilizando tipos diferenciados de ejemplos adaptados a la fase en que se encuentre. Pero considerando siempre que el proceso se desarrolla en fases diferentes.

La otra constatación es la afirmación de que la función del ejemplo es, principalmente, esclarecer, aclarar situaciones confusas y sistematizar cuando analizamos las referencias a las categorías durante las entrevistas. La 3ª categoría fue la más referida durante las entrevistas (ocho veces), lo que nos permite comprobar la importancia dada a esta función de los ejemplos: “... pero pretendemos con ese ejemplo esclarecer (...) para consolidar algo...”. Por otro lado, si analizamos el número de ejemplos que ocurren en las aulas asistidas y en las fichas de trabajo, la mayor frecuencia se encuentra en la 2ª categoría, es decir, existe una diferencia apreciable en lo que S preconiza en las entrevistas y lo que S hizo en el cotidiano de sus prácticas. En el trabajo diario S no utilizó ejemplos para esclarecer o para disipar las confusiones de los alumnos, salvaguardando una ocasión, tampoco utilizó ejemplos para prevenir estas confusiones o dudas, prefiriendo utilizar otros medios para resolver la situación. Por eso S no valoró en la práctica los ejemplos de la 3ª categoría de la misma forma que los valoró en las entrevistas, esa primacía prefirió atribuirlos a los ejemplos de la 2ª categoría, aquellos que tratan los aspectos más simples del concepto siendo, de esta forma, coherente con la forma fraccionada con que prefería tratar los temas y promover la construcción de los esquemas conceptuales de los alumnos.

Eventualmente, la preferencia por ejemplos propios de la 2ª categoría en vez de los ejemplos relativos a la 3ª categoría para la resolu-

ción de confusiones y dudas se justifica con la necesidad de ejemplificar de forma espontánea en estas ocasiones. Para un estudiante para profesor, con poca experiencia lectiva, será difícil encontrar buenos ejemplos de forma instantánea.

En conclusión, S tiene ideas bastante precisas y bases sólidas de lo que para ella debe ser el proceso de enseñanza/aprendizaje, distingue conceptos de *visualización fácil* y los de *visualización difícil* y la forma diferenciada de introducirlos; atribuye funciones y objetivos a los ejemplos y los escoge de acuerdo con lo que pretende y en función de las necesidades; opta casi siempre por el aspecto gráfico cuando pretende que los alumnos accedan a las características más simples del concepto; comprende la importancia de los ejemplos de aplicación interna y externa en la aplicación de las Matemáticas, en el itinerario estudiantil del alumno y en la estructuración de esquemas conceptuales.

De las categorías

En el ámbito de las referencias y ejemplos incluidos en la categoría “1. Definición” consideramos significativo el hecho de que los informantes distingan dos formas de introducción de conceptos. Una inductiva, una selección de ejemplos con características semejantes que conducen a los alumnos al concepto y a su definición. Otra ilustrativa, el concepto es definido y, para que tenga sentido, se presenta una colección de ejemplos que dan cuerpo y materializan ese concepto. Los dos informantes consideraran el primer proceso como el más adecuado. De cualquier manera, durante la fase de selección de ejemplos, tres profesores (del grupo de 4) utilizaron sistemáticamente el segundo, utilizando sistemáticamente la faceta gráfica para introducir los conceptos.

En relación con la ejemplificación destinada a los primeros contactos autónomos de los alumnos con el concepto, categoría “2. Representación”, el resultado más importante es la constatación de la cantidad de ejemplos de esta categoría que utilizaron. Una mirada a los

cuadros con los totales, cuadro 1 y cuadro 2, es suficiente para recordar el desequilibrio en relación con los totales de las otras categorías. La casi totalidad de los ejemplos de esta categoría abarca apenas una representación, dos representaciones en algunos, siempre el aspecto algebraico o gráfico, eventualmente los dos. El motivo se relaciona con un proceso de simplificación y fraccionamiento del concepto con vista a motivar al alumno para el triunfo. La estrategia es no complicar en el inicio, después, al final se juntan las partes y se forma el todo.

Fue con la tercera categoría “*Características*” cuando los resultados se mostraron más contradictorios. Esta es la categoría más referida en las entrevistas pero es la que incluye menos ejemplos. Esto es, en teoría el papel principal de los ejemplos es elucidar y esclarecer dudas; de cualquier modo, en la práctica, ese papel principal le cabe a los ejemplos simples de la categoría anterior. Los conceptos y esquemas conceptuales no fueron profundizados por sus características pero sí por las representaciones. En situación de duda por parte del alumno los jóvenes profesores no crearon ni recurrieron a ejemplos propios para esclarecer, utilizaron la propia situación que condujo a la duda.

Un resultado perturbador fue el hecho de que los profesores, en las ocasiones en que se “*atreveron*” a crear ejemplos con la finalidad de esclarecer una duda, lo hicieron siempre con la utilización de números enteros entre -7 y 7. La utilización espontánea, con alumnos entre 16 y 17 años, de números racionales o reales fue prácticamente inexistente.

En cuanto a las categorías relativas a las *aplicaciones*, existe un desequilibrio entre las *internas* y las *externas*. La importancia que los profesores atribuyeron a las aplicaciones internas no ultrapasa el mero ejercicio rutinario y sirvió apenas para establecer que los temas matemáticos no son cerrados, herméticos, aislados unos de otros. El tratamiento de la aplicación externa a otras ciencias o a la vida real fue diferente. Hubo referencias a ello en las dos entrevistas y los ejemplos, a veces configuran situaciones problema, hicieron su aparición

de forma cotidiana para cerrar, por decirlo así, los capítulos dedicados a determinado tema. La importancia de las modelaciones en otras ciencias y caracterizaciones de la vida real tuvo un cariz de importancia creciente a lo largo del año, muy evidente al final, en consecuencia del realce dado por las indicaciones metodológicas emanadas del Ministerio de Educación y, directamente, por la utilización del manual adoptado.

Conclusiones y Sugerencias

Los ejemplos producidos durante las prácticas docentes y que utilizan cotidianamente pueden ser considerados un buen material para constituir unidades de análisis razonablemente objetivas. En la opinión de uno de los jóvenes profesores, que todos seguramente compartimos, está mucho del espíritu que orientó todos los días en que nos ayudamos mutuamente: “... *si una persona tuviese experiencia y nunca reflexione sobre aquello que está haciendo, nunca va a conseguir llegar a la conclusión de si es buen o si es mal profesor, si utiliza bien los ejemplos, o si no utiliza bien los ejemplos.*” (Entrevista de Junio 2005)

La presentación de las conclusiones está directamente relacionada con los objetivos propuestos para el estudio.

Relativas a las especificidades de los ejemplos

Existen trazos comunes en las referencias dadas en las entrevistas y también a la ejemplificación presentada por los dos profesores en prácticas. Consideramos significativos los aspectos:

a) La categoría más referida en las entrevistas es la Categoría Características. Véase el cuadro 1 con los totales relativos a las referencias.

Esa no es, de todas formas, la única coincidencia. Obsérvese la semejanza de las referencias globales del cuadro 2. Por el número de referencias en las declaraciones deducimos que, para los informantes, los ejemplos sirven

sobre todo para esclarecer dudas y para sistematizar. Sin la presión del ambiente de la clase y de la actividad lectiva, con una conversación relajada y despreocupada es esa la función de los ejemplos que sobresale de las opiniones de estos profesores en prácticas, sea en septiembre o en junio.

b) Otra coincidencia es que la función de la ejemplificación menos considerada es la de interconexión entre conceptos matemáticos a nivel interno. De todos los contactos mantenidos entre los profesores en prácticas y su orientador siempre sobresalió la aplicación de las matemáticas a nivel externo, los nexos a nivel interno son tan obvios para ellos que no sienten gran necesidad de trabajar ese hecho con sus alumnos de forma aislada. Sumando a este hecho las líneas apuntadas en los programas, ejemplos propuestos en los diversos manuales y las orientaciones de las disciplinas de didáctica siempre apuntan para la resolución de problemas, sobre todo, de la vida real. Por eso los profesores no estuvieron muy abiertos para los ejemplos exclusivamente matemáticos.

c) En todas las situaciones improvisadas referidas al esclarecimiento de dudas que fueron observadas en los cuatro informantes, aquellos ejemplos que ocurrieron sin preparación, los coeficientes, raíces y otros valores numéricos utilizados son enteros, dando la idea de que el universo con el que trabajaban era siempre \mathbb{Z} y nunca utilizaron otros que fuesen de \mathbb{Q} o \mathbb{IR} . La explicación para este hecho reside en el cuidado que estos profesores tuvieron en no introducir elementos que pudiesen crear algún ruido en la ejemplificación. Su opinión es que la utilización de elementos de \mathbb{Q} o \mathbb{IR} podrían introducir un grado de dificultad artificial e innecesario. Pensamos que el efecto es exactamente el contrario. Tornar banal la utilización de estos números produce en los alumnos una indiferencia en su utilización.

Relativas al papel de los ejemplos en la enseñanza/aprendizaje

Curiosamente, la categoría que incluye más ejemplos es la Categoría Representación. En la

agitación y tensión del día a día de la docencia, la importancia relativa de cada categoría se va modificando. Ahora la importancia se transfiere para los ejemplos propios de la segunda categoría, la principal característica del ejemplo ya no es esclarecer y sistematizar, pasando a ser la construcción de los conceptos a costa de sus representaciones. El porcentaje de ejemplos de esta categoría utilizados en el día a día se refleja a su vez en la cantidad de tiempo utilizada con los alumnos. Así, la actividad usual con los alumnos se centró fundamentalmente en ejemplos que configuraban ejercicios elementales y rutinarios y muy poca cantidad de ejemplos de las 4ª y 5ª categorías. No fue esa la indicación del orientador, antes al contrario, los profesores en prácticas siempre fueron incentivados a crear en sus aulas situaciones de problema. Creemos que optaron por una actitud de defensa, el período de supervivencia no se refiere tanto a la disciplina del aula, sino a tener que enfrentar situaciones inesperadas en términos de competencia didáctico-pedagógica o, pero no tanto, de competencia matemática y los ejemplos de situaciones de aplicación interna y externa, constantes en las fichas de trabajo, fueron dejados para trabajo de casa.

En situación de duda por parte de algún alumno las dos profesoras en prácticas utilizaron mayoritariamente las propias situaciones de duda para esclarecerlas y no crearon nuevos ejemplos, la creación de situaciones alternativas, con otros ejemplos para superar las dificultades dadas para observar no fue la regla, más bien la excepción.

Las dos Profesoras definieron primero y ejemplificaron después, utilizaron una metodología basada en un proceso cuya orientación es partir de lo general hacia lo particular en la situación en que se pretende la introducción de nuevos conceptos, dando a los ejemplos un papel esencialmente ilustrativo y casi nunca inductivo. Este trazo de tendencia didáctica tradicional (Climent, 2002; Carrillo y Contreras, 1993, 1994, 1995; Contreras, 1998 y Porlán, 1992) de los profesores inexpertos, tal como está ampliamente documentado, también se evidenció en esta investigación.

En los análisis de los datos de cada una de estas profesoras en prácticas podemos encontrar una tendencia para el fraccionamiento de los conceptos. El motivo por el cual los profesores en prácticas dividieron un esquema complejo en múltiples ejemplos simples es que creyeron que su comprensión, fraccionado en situaciones simples, es más fácil de alcanzar. Este hecho, de que los alumnos comprendan las situaciones simples, no es contestable, lo que se contesta es el hecho de que los profesores consideren simple la unión de todos los pasos.

Relativas a la existencia de patrones en el Conocimiento Didáctico del Contenido

Por lo anteriormente analizado podemos hacer alguna consideración sobre el conocimiento didáctico de contenido, referente al aprendizaje y referente a la enseñanza (Climent, 2002) y, en estos niveles, a patrones comunes a los cuatro profesores en prácticas:

Referente al aprendizaje:

– No esperan y no prevén las dudas y dificultades de los alumnos en los diversos contenidos relativos a las funciones, lo que indica que su conocimiento didáctico del contenido se encuentra en un escalón de desarrollo muy incipiente.

– Consideran que los alumnos profundizan en los diferentes conceptos sobre funciones sobre la base de muchos ejemplos simples que envuelven una representación de cada vez, lo que podría ser justificado como característica de la tendencia tradicional en la que se considera que el aprendizaje está asentado en un seguimiento rígido de un guión predeterminado que conduce, forzosamente, al objetivo para el que fue creado.

– No se dan cuenta de los errores y dificultades futuras que pueden inducir en sus alumnos.

Referente a la enseñanza:

– No conciben el concepto de función como un todo integrado, lo ven más como la suma de varias partes, esperando que el alumno sobreponga la información y que la aprenda

sólo por el hecho de que el profesor le transmitió esa información. Lo que revela, según Contreras (1998), una fuerte tendencia tradicional.

– En una situación de duda mantienen el ejemplo que la provoca, no diversifican el esclarecimiento con otros ejemplos, lo que es sintomático en quien no posee una base de ejemplos suficientemente rica donde escoger los ejemplos más apropiados a determinada situación.

Sugerencias

El estudio de que damos cuenta en este trabajo tuvo, al final, una consecuencia importante en el ámbito de los objetivos antes propuestos. Por un lado, nos ha creado la firme convicción de que una metódica selección de los ejemplos que presentamos a nuestros alumnos puede marcar en ellos la diferencia entre un aprendizaje mejor estructurado, mejor enfocado y con preocupaciones bien definidas y, por otro lado nos invita a reflexionar acerca de la *quasi-aleatoria* y empírica presentación de casos generada en las creencias del profesor.

Pensamos que es posible inferir que algunas de las “deficiencias” y “hábitos” que hemos imputado a los profesores en prácticas todavía pueden ser visibles en el quehacer diario de algunos docentes más experimentados y que pueden ser fácilmente descubiertas; es necesaria una reflexión para confrontar aquello que encontramos importante con lo que en realidad valoramos; ver hasta que punto la sustancia de la frase “Esto les ocurre porque todavía son noveles!” también es una ocurrencia de nuestra propia “inexperiencia”.

Nuestra investigación, basta notar sus objetivos, tenía la fuerte misión de estudiar características de profesores en prácticas. A pesar de ello, la asociación del trabajo de estos profesores con el trabajo de sus alumnos era inevitable. Hemos visto, por tanto, toda la diferencia que nuestra acción provocó en el trabajo de los alumnos. El investigador, por su experiencia con alumnos, pudo verificar la forma diferente

como los alumnos correspondían a la presentación de ejemplos trabajados por todos los participantes de la investigación.

Por fin, esperamos que la forma en la que estos profesores trabajaron los ejemplos con sus alumnos pueda ayudar a otros profesores y a otros alumnos. A los profesores en la forma de escoger y presentar sus ejemplos, a los alumnos en el nivel del rendimiento que esas elecciones puedan proporcionar.

REFERENCIAS

- AZCÁRATE, C. (1995). Sistemas de representación. *Uno*, 4, 53-61.
- AZCÁRATE, C. (1997). Si el eje de coordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo? *Suma*, 25, 23-30.
- BARRANTES, M. Y BLANCO, L. J. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para Maestro sobre la Geometría escolar. *Enseñanza de las Ciencias*, 22 (2), 241-250.
- BLANCO, L.J. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Épsilon*, 25, 49-60.
- CALVO, C. Y AZCÁRATE, C. (2001). Usos alternativos de las pruebas visuales en los cursos de cálculo diferencial e integral. *Reporte de investigación presentado en la 15ª Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. (RI-044, RELME 15) Buenos Aires, Argentina.
- CARRILLO, J. Y CONTRERAS, L.C. (1993). La identificación de las concepciones del profesor sobre la matemática y la educación matemática como claves para el diseño de estrategias de formación del profesorado. *VI Jornadas Andaluzas de Educación Matemática "Thales"*. Sevilla.
- CARRILLO, J. Y CONTRERAS, L.C. (1994). The relationship between the conceptions of mathematics and of mathematics teaching. A model using categories and descriptors for their analysis. *18 th PME Conference*, II, 152-159.
- CARRILLO, J. Y CONTRERAS, L.C. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la Matemática y su Enseñanza. *Educación Matemática*, 7(3), 79-92.
- CONTRERAS, L.C. (1998). *Resolución de problemas. Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula*. Tesis Doctoral. Publicaciones de la Universidad de Huelva.
- CLIMENT, N. (2002). *El desarrollo Profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática*. Tesis Doctoral. Universidad de Huelva.
- FIGUEIREDO, C. A. (2005). Os exemplos utilizados por professores estagiários quando ensinam o conceito de Função. *Memoria de Proyecto de investigación de Doctorado*. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas. Universidad de Extremadura.
- MARCELO, C. (1987). *El Pensamiento del Profesor*. Barcelona: CEAC.
- MARCELO, C. (1993). Cómo conocen los profesores la materia que enseñan. Algunas contribuciones de la investigación sobre el Conocimiento Didáctico del Contenido. En L. Montero y J. Vez (Eds.), *Las Didácticas Específicas en la Formación del Profesorado*. Santiago, Tórculo, 151-186.
- MASON, J.H. y WATSON, A. (2001). Getting Students to Create Boundary Examples. *MSOR Connections*, 1(1), 9-11.
- MICHENER, E. (1978). Understanding understanding mathematics. *Cognitive Science* 2, 361-381.
- NCTM (2000). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.
- ORTON, A. (1990). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Morata/MEC.
- PORLÁN, R. (1992). Teoría y práctica del currículum. El currículum en la acción. En AA.VV. *Curso de actualización científico-didáctica*. Madrid: MEC.
- ROWLAND, T., THWAITES, A. y HUCKSTEP, P. (2003). Elementary Teachers' Mathematics Content Knowledge and Choice of Examples. *CERME 3: Third Conference of*

- the European Society for Research in Mathematics Education*. Bellaria, Italy.
- SKEMP, R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Middlesex, England: Penguin.
- TALL D. y VINNER S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12,151-169.
- WATSON, A. y MASON, J. (2002). Extending example spaces as a teaching/learning strategy in mathematics. In A. D. Cockburn and E. Nardi (Eds.) *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4. Norwich: University of East Anglia, 378-386.
- WATSON, A y MASON, J. (2004). The exercise as mathematical object: Dimensions of possible variation in practice. McNamara, O. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*. Leeds, UK: BSRLM, 24 (2), 107-112.
- WILSON, P. S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus in Learning Problems in Mathematics*, 12 (3-4), 31-47.

ABSTRACT

This article represents a reflection on the process of exemplification in mathematics. It is a consequence of a research study into how common characteristics were manifest in the teaching of the concept of function by four prospective teachers. In that study, we recorded and analyzed the examples used by these four prospective teachers. This enabled us to describe some aspects linked to their pedagogical content knowledge in this specific topic. The scheme followed may be useful for application to other topics of school mathematics, but above all it allows one to reveal some of the variables involved in the evolution of the process of exemplification.

KEY WORDS: *Pedagogical Content Knowledge; Preservice Teachers Training; Mathematical Exemplification Process.*

RÉSUMÉ

Cet article suppose une réflexion sur le processus d'illustration dans mathématiques, conséquence d'une recherche dont l'intention a été d'étudier comment quatre professeurs sans expérience scolaire soulignaient des caractéristiques communes dans le processus d'enseignement du concept de fonction. À cet effet, nous avons rassemblé et analysons les exemples utilisés par les quatre étudiants pour professeur et, à travers ces exemples, avons pu décrire quelques aspects liés à leur connaissance didactique du contenu dans ce cadre conceptuel. Le schéma rapproché peut être utile pour être développé dans d'autres domaines des étudiants mathématiques, mais, surtout, permet de dévoiler quelques variables dans l'évolution du processus d'illustration.

MOTS CLÉ: *La connaissance du contenu pédagogique; Formation de professeurs; Le processus pour mettre des exemples dans les mathématiques.*